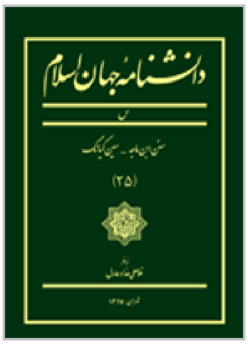


جبرومقابله

پدیدآورنده (ها) : سودای، فاطمه؛معصومی همدانی، حسین
ادیان، مذاهب و عرفان :: نشریه دانشنامه جهان اسلام :: جلد 9 (ث - جران العود)
از 576 تا 596
آدرس ثابت : https://www.noormags.ir/view/fa/articlepage/1700093

بدرالدین نعسانی حلبی، مصر ۱۹۰۷/۱۳۲۵، چاپ افست قم ۱۳۷۰ ش؛ اسماعیل‌بن حماد جوهری، *الصحاح فی‌اللغة و العلوم*، چاپ ندیم مرعشلی و اسامة مرعشلی، بیروت ۱۹۷۴؛ محسن جهانگیری، «قدریان نخستین»، ***معارف***، دورهٔ ۵، ش ۱ (فروردین ـ تیر ۱۳۶۷)؛ سمیح دغیم، *موسوعة مصطلحات علم‌الکلام الاسلامی*، بیروت ۱۹۹۸؛ حسین‌بن محمد راغب اصفهانی، *المفردات فی غریب القرآن*، چاپ محمد سیدکیلانی، بیروت [بی‌تا.]؛ هادی‌بن مهدی سبزواری، *شرح المنظومة*، چاپ حسن حسن‌زاده آملی، تهران ۱۴۱۶ـ۱۴۲۲؛ عبدالرحمان‌بن ابی‌بکر سیوطی، *تاریخ الخلفاء*، چاپ محمد محیی‌الدین عبدالحمید، مصر ۱۳۷۸/ ۱۹۵۹؛ محمد پادشاه‌بن غلام محیی‌الدین شاد، *آنندراج: فرهنگ جامع فارسی*، چاپ محمد دبیر سیاقی، تهران ۱۳۶۳ ش؛ حسن شافعی، *المدخل الی دراسة علم‌الکلام*، قاهره ۱۹۹۱/۱۴۱۱؛ محمدبن عبدالکریم شهرستانی، *الملل والنحل*، چاپ محمد سیدکیلانی، قاهره ۱۹۶۷/۱۳۸۷؛ محمدبن ابراهیم صدرالدین شیرازی، *الحکمة المتعالیة فی الاسفار العقلیة الاربعة*، تهران ۱۳۳۷ ش، چاپ افست قم [بی‌تا.]؛ عبدالرحیم‌بن عبدالکریم صفی‌پوری، *منتهی‌الارب فی لغة العرب*، چاپ سنگی تهران ۱۲۹۷ـ۱۲۹۸، چاپ افست ۱۳۷۷؛ محمدحسین طباطبائی، *اصول فلسفه و روش رئالیسم*، مقدمه و پاورقی به قلم مرتضی مطهری، تهران ۱۳۶۸ـ۱۳۷۰ ش؛ طبرسی؛ محمودبن علی عزالدین کاشانی، *مصباح الهدایة و مفتاح الکفایة*، چاپ جلال‌الدین همایی، تهران ۱۳۶۷ ش؛ حسن عطوان، *الفرق الاسلامیة فی بلاد الشام فی العصرالاموی*، [بیروت] ۱۹۸۶؛ حسین‌بن یوسف علامه حلّی، *انوار الملکوت فی شرح الیاقوت*، چاپ محمد نجمی زنجانی، تهران ۱۳۳۸ ش؛ همو، *کشف‌المراد فی شرح تجرید الاعتقاد*، چاپ حسن حسن‌زاده آملی، قم ۱۴۰۷؛ همو، *نهج‌الحق وکشف‌الصدق*، بیروت ۱۹۸۲؛ محمدبن محمدفارابی، *فصوص الحکم*، چاپ محمدحسن آل‌یاسین، بغداد ۱۳۹۶، چاپ افست قم ۱۴۰۵؛ محمدبن عمر فخررازی، *المطالب العالیة من‌العلم الالهی*، چاپ احمد حجازی سقا، بیروت ۱۴۰۷/ ۱۹۸۷؛ عبدالهادی فضلی، *خلاصة علم الکلام*، بیروت ۱۴۱۴/ ۱۹۹۳؛ قاضی عبدالجباربن احمد، *شرح الاصول الخمسة*، چاپ عبدالکریم عثمان، قاهره ۱۹۸۸/۱۴۰۸؛ همو، *فضل الاعتزال و طبقات المعتزلة*، چاپ فؤاد سید، تونس [بی‌تا.]؛ محمدبن علی کراجکی، *کنزالفوائد*، چاپ عبداللّه نعمه، بیروت ۱۹۸۵/۱۴۰۵؛ عبدالرزاق‌بن علی لاهیجی، *گوهرمراد*، چاپ سنگی تهران ۱۲۷۷؛ محمدبن محمد ماتریدی، *کتاب‌التوحید*، چاپ فتح‌اللّه خلیف، بیروت ۱۹۷۰؛ همو، *کتاب شرح‌الفقه الاکبر*، حیدرآباد دکن ۱۳۶۵؛ مجلسی؛ اسماعیل‌بن محمد مستملی، *شرح التعرف لمذهب التصوف*، چاپ محمد روشن، تهران ۱۳۶۳ـ۱۳۶۶ ش؛ مسلم‌بن حجاج، *صحیح مسلم*، استانبول ۱۹۸۱/۱۴۰۱؛ محمدبن محمد مفید، *اوائل المقالات فی المذاهب‌والمختارات، ویلیها رسالة شرح عقائد الصدوق، او، تصحیح الاعتقاد*، چاپ عباسقلی ص. وجدی (واعظ چرندابی)، تبریز ۱۳۳۰ ش؛ محمدباقربن محمد میرداماد، *القبسات*، حاشیه: *الایقاظات*، چاپ سنگی تهران ۱۳۱۴؛ میمون‌بن محمد نسفی، *تبصرة الادلة فی اصول‌الدین علی طریقة الامام ابی‌منصور الماتریدی*، چاپ کلود سلامه، دمشق ۱۹۹۰ـ۱۹۹۳؛ علی سامی‌نشار، *نشأة‌الفکر الفلسفی فی الاسلام*، قاهره[۱۹۹۵ـ۱۹۹۶]؛ محمدبن‌محمدنصیرالدین‌طوسی، *تجرید الاعتقاد*، چاپ محمدجواد حسینی‌جلالی، [قم] ۱۴۰۷؛همو، *رساله جبر و اختیار*، در *دو رسالهٔ فلسفی در بیان ارادهٔ انسان*، تهران: نشر علوم اسلامی، ۱۳۶۳ش؛ عبداللّه‌بن اسعد یافعی، *کتاب مرهم العلل المعضلة فی‌الرد علی ائمة المعتزلة*، چاپ محمود نصار، بیروت ۱۹۹۲/۱۴۱۲؛
EI[2], s.v. "Ḳadariyya" (by J. Van Ess).

/ **محسن جهانگیری** /

جبروت ← عالَم

جبر و مقابله، با تحولاتی که به‌ویژه از قرن نوزدهم میلادی تاکنون رخ داده، واژهٔ جبر امروز بر یکی از علوم ریاضی اطلاق می‌شود که موضوع آن بررسی ساختارهای جبری (گروه، حلقه، هیئت،...) است، اما در این مقاله ما آن را به معنایی محدودتر، و تاریخی‌تر، به‌کار خواهیم برد. در این معنی، جبر علمی است که موضوع آن حل معادلات و نیز عملیات بر روی چند جمله‌ایهاست. این علم در دوران اسلامی «جبر» یا «جبر و مقابله» نامیده می‌شده است.

معنای واژه‌های جبر و مقابله. واژهٔ«الجبر» (در فارسی: «جبر») نخستین بار در عنوان *کتاب المختصر فی‌حساب الجبر و المقابلة* تألیف محمدبن موسی خوارزمی* به‌کار رفته و پس از آشنایی اروپاییان با این کتاب (ادامهٔ مقاله) با مختصر تغییراتی (مثلاً به صورت algebra در انگلیسی و algèbre در فرانسه) به زبانهای دیگر راه یافته است. این واژه از ریشهٔ جَبَرَ در عربی گرفته شده که به معنای شکسته‌بندی و جُبران است، اما خوارزمی آن را بر عملِ افزودن جمله‌های مساوی بر دو سوی یک معادله، برای حذف جمله‌های منفی، اطلاق می‌کند. واژهٔ «مقابله»، که آن هم در عنوان کتاب خوارزمی دیده می‌شود، به معنای حذف مقادیر مساوی از دو طرف معادله است (← محمدبن موسی خوارزمی، ص ۴۰). نویسندگان آثار دایرةالمعارفی، از جمله محمدبن احمد خوارزمی (متوفی ۳۸۷؛ ص ۲۰۰) و فخررازی (زندگی، ۵۴۳ـ ۶۰۶؛ ص ۳۹۳) و ابن‌اکفانی (ص ۸۴) و طاشکوپری‌زاده (ج ۱، ص ۳۶۹) و حاجی‌خلیفه (ج ۱، ستون ۵۷۹) و غالب جبردانان پس از خوارزمی، از جمله ابوبکر محمد کَرَجی* (قرن چهارم)، واژهٔ جبر را به همین معنی به‌کار برده‌اند (نیز ← بلوستا[1]، ص ۷۴). ابوکامل شجاع‌بن اسلم* (نیمهٔدوم قرن‌سوم) نیز مشتقات واژهٔ جبر

1. Bellosta

را بــه هـمین مـعنی بـه‌کـار مـی‌برد. مـثلاً بـرای حـل مـعادلهٔ $100-20x=80$ می‌گوید: «صد درهم را با بیست شیء جبر کن و آن را با هشتاد جمع کن (فَاجْبُرِ المِـائةَ درهـم بِـالعشرین شـیء وَزِدْهابالثمانینَ)» تا به‌صورت $20x+80=100$ درآید (ــــ ابوکامل، ۱۴۰۶[الف]، ص ۴۹ـ۵۰؛ همو، ۱۴۰۶[ب]، ص ۶۹). ابوریحان بیرونی (*التفهیم*، متن عربی، ص ۳۷، متن فارسی، ص ۴۸ـ۴۹). عمل جبر را به افزودن مقادیر مساوی به دو کفهٔ ترازو برای حفظ تعادل آن تشبیه می‌کند و در این تمثیل، بی‌آنکه به آن تصریح کند، به اصول $a = b \Rightarrow a + c = b + c$ و $a = b \Rightarrow a - c = b - c$ از اصول متعارف کتاب *اصول* اقلیدس[1] (ج ۱، ص ۱۵۵) استناد می‌جوید. خواجه‌نصیرالدین طوسی (۵۹۷ـ۶۷۲؛ ۱۳۳۵ش، ص ۱۹ـ۲۰) و غیاث‌الدین جمشید کاشانی (متوفی ۸۳۲؛ ص ۱۸۹) و ابن‌غازی مکناسی (متوفی ۹۱۹؛ ص ۲۲۸) نیز جبر و مقابله را بــه هـمین صورت تعریف کرده‌اند. با این حال ابـن‌بنّای مـراکشـی (۶۵۴ـ۷۲۱)، هرچند در کتاب خود بخشی را به جبر و مقابله به معنای متعارف آن اختصاص داده، در جای دیگری واژهٔ «جـبر» را بـه «اصلاح» معنی می‌کند و آن را به معنی تقسیم مقدار ثـابت بـه ضریب مجهول در مـعادلهٔ $ax = b$ مـی‌دانـد (ص ۵۶؛ نـیز ــــ قَلَصادی، ص ۱۵۱ـ۱۵۲). اما قـلصادی (ص ۲۴۷)، جـبر را بـه همان معنای اصطلاحی به‌کار برده است. کاربرد ابن‌بنّا نیز هرچند با معنی متعارف جبر متفاوت است، به‌نحوی با ریشهٔ لغوی این کلمه ارتباط دارد. به این دلایل، نظر صلیبا (۱۹۸۳) که این واژه را مشتق از ریشهٔ جَبَرَ به معنای مجبور کردن و نـاگـزیر کـردن می‌داند و غرض خوارزمی را از آن «بیرون کشیدن» ریشهٔ یک معادله می‌شمارد پذیرفتنی نمی‌نماید.

جایگاه جـبر در مـیان عـلوم. در طبقه‌بندیهای یـونانیان از علوم، نام علم جبر جزء علوم‌ریاضی نیامده‌است. نخستین کسی که جبر را در طبقه‌بندی علوم داخل کرده فـارابـی است کـه در *احصاءالعلوم* خود بخشی را به «علم‌الحیل» یا «عـلوم الحـیل» اختصاص داده است. ایـن عـلوم، کـه فـارابـی در تـعریف آنـها مـــی‌گوید: «عـلم شـیوهٔ چـاره‌جویی است بـرای کـاربرد آنـچه وجودشان در ریاضیات با برهان ثابت شده در اجسام‌طبیعی و ایجاد و وضع آنها بالفعل» (ص ۸۸)، جـز «عـلم‌حیل» بـه‌معنای متعارف آن و نیز «علم آینه‌های سوزان»، که جزء «حیل هندسی» هستند، دستهٔ دیگری از علوم را نیز دربرمی‌گیرد که فارابی آنها را «حیل عددی» می‌نامدو شامل «علمی است در میان مردم زمان ما به جبر و مقابله معروف است» (ص ۸۹). از اینکه فارابی جبر را جزء علوم حیل آورده، معلوم می‌شود که از نظر او هنوز جبر نه علمی برهانی بلکه مجموعه‌ای از شگـردها بـرای اسـتخراج ریشه‌های معادلات شمرده می‌شده است. این دیدگاه به نحوی در طبقه‌بندی ابن‌سینا از علوم هم منعکس شـده است. وی در رسالهٔ *فی‌اقسام العلوم العـقلیة* (ص ۱۲۲) جـبر را جـزء «اجـزاء فرعی (الاقسام الفرعیة) ریاضیات» آورده و آن را، در کنار «عمل جمع و تفریق بر حَسَب حساب هندی» یکی‌از «شاخه‌های علم اعداد (من فـروع عـلم العـدد)» شـمرده است. در تـقسیم‌بندی ابن‌سینا، علم «حیل هندسی»، در کنار «علم اثقال، صناعت اوزان و موازین، مناظر و مرایا و آینه‌ها» جزء فروع علم هندسه شمرده شده است. همین طبقه‌بندی در رساله‌ای از خواجه‌نصیر طوسی نیز بعینه تکرار شده است (ــــ نصیرالدین طـوسی، ۱۳۵۹ش، ص ۵۲۷). بدین‌ترتیب، در تـقسیم‌بندی ابـن‌سینا آنـچه فـارابـی «علوم حیل» نام داده، با تـفصیل بـیشتر، «اقسـام فـرعی عـلوم ریاضی» نام گرفته است. با این حـال، ابـن‌سینا بـرخـی از ایـن رشته‌ها را «علم» (علم المساحة، علم‌الحیل المتحرکة، علم نقل المیاه) و برخی دیگر، از جمله جبر، را «عمل» می‌نامد. ظاهراً خصوصیت مشترک دستهٔ‌اخیر عملی بودن آنهاست. ابن‌سینا در تقسیم‌بندیهای دیگری که از علوم کرده است این علوم فرعی را ذکر نمی‌کند (ــــ *منطق‌المشرقیین*، ص ۵ـ ۶، که تصریح می‌کند که تنها علوم اصلی را ذکر کرده است).

در تعریف کرجی (قرن چهارم هجری ــــ ادامهٔ مقاله)، جبر و مقابله یکی از روشهای «حساب» است، اما تعریف کرجی از حساب بسیار کلی‌تر از مفهوم حساب به عنوان مـجموعه‌ای از روشــها و «عــبارت است از بــه دست آوردن مــجهولات از معلومات» (کرجی، ۱۹۶۴، ص ۷؛ همو، ۱۴۰۶، ص ۹۷)، این تعریف خود در واقع از مفهوم جدید جبر متأثر است. تعریفی که کرجی از روشهای حساب به دست می‌دهد هم حل مـعادلات سیّال و معیّن را شامل می‌شود و هم حساب چند جمله‌ایها را.

خیام در رسالهٔ *جبر و مقابلهٔ* خود (ص ۷، ترجـمهٔ فـارسی، ص ۱۵۹؛ نیز ــــ راشد و وهاب‌زاده، ص ۱۱۷)، «صناعت جبر و مقابله» را یکی از «مفاهیم ریاضی» می‌شمارد «که در بخشی از فلسفه که به ریاضی معروف است، بدان نیاز می‌افتد». هرچـند خیام در این عبارت در صدد به دست دادن تعریفی جامع و مانع از جبر نیست، اما از نوشتهٔ او چنین استفاده می‌شود که جبر اولاً «صناعت» است و ثانیاً جزء علوم ریـاضی است. نـتیجهٔ کـلی سخن خیام این است که جبر در طبقه‌بندی کلی علوم فلسفی قرار می‌گیرد، هرچند او جایگاه آن را در مـیان ایـن عـلوم مشـخص نمی‌کند. وی همچنین در تعریف جبر می‌نویسد که «فن جبر و مقابله فنی علمی است که موضوع آن عدد مطلق و مقادیر قابل سنجش است از آن جهت که مجهول‌اند ولی مرتبط با چیز معلومی

1. Euclid

هستند که به وسیلهٔ آن می‌توان آنها را استخراج کرد» (ص ۸ـ۹، ترجمهٔ فارسی، ص ۱۶۱؛ نیز ← راشد و وهاب‌زاده، ص ۱۲۰ـ۱۲۱). بنابراین، در نظر خیام، مقادیر عددی و مقادیر هندسی هر دو می‌توانند ریشهٔ معادلات جبری باشند. خیام در رسالهٔ دیگر خود به‌نام *فی‌قسمة ربع‌الدائرة* (این رساله، با عنوان *رسالة لابی الفتح عمربن ابراهیم الخیامی* به‌چاپ رسیده است) نیز تلویحاً با این فکر که جبر مجموعه‌ای از شگردها («حیله»)، توجه کنید که در تقسیم‌بندی فارابی جبر جزء «علوم الحیل» قرار مـی‌گیرد) بـاشد مخالفت می‌کند. خیام می‌نویسد: «و آنکه گمان برده است که جبر حیله‌ای [شگردی] بـرای اسـتخراج اعـداد مـجهول است، امـر نامعقولی راگمان برده‌است. ... جبر و مقابله اموری هندسی است که به‌وسیلهٔ اَشکال پنجم و ششم مقالهٔ دوم [*اصول* اقـلیدس] مبرهن می‌شود» (ص۶۵ـ۶۶، ترجمهٔ فارسی، ص ۲۶۴؛ نیز ← راشد و وهاب‌زاده، ص ۲۵۱). به این ترتیب، جبر و مقابله، از نظر خیام، علمی هندسی است و چون هندسی است بُرهانی نیز هست. این اختلاف در جایگاه جبر به دلیل تازگی این علم و دو تصوری است که از آغاز این علم به‌موازات هم وجود داشته است.

در طبقه‌بندیهای مـتأخر (مـثلاً حـاجی‌خلیفه، ج ۱، سـتون ۵۷۸) علم جبر و مقابله «از فروع علم حسـاب» شـمرده شـده است. اما باید توجه داشت که این طبقه‌بندیها به دورانی تـعلق دارند که دستاوردهای بزرگ علم جبر دوران اسلامی فـرامـوش شده و از آن تقریباً چیزی جز حل شش دسته معادلهٔ خوارزمی باقی نمانده بود.

پیشینهٔ علم جبر. مسائلی‌که یافتن مقدار مجهول در آنها به حل معادلات جبری درجهٔ اول و دوم، و گاه به حـل دسـتگاهی از معادلات، منجر می‌شود، ازگذشتهٔ بسیار دور در تمدنهای گوناگون شناخته بوده است و برخی از مورخان مانند بارتل وان در واردن[1] ریشهٔ این مسائل را به دورانهای پیش از تـاریخ مـی‌رسانند (← واردن، ۱۹۸۳). مصریان‌باستان با دستور (الگوریتم) حل معادلات درجهٔ اول آشنا بودند و بابلیها، از حدود ۱۷۰۰ پیش از میلاد، نه تنها راه‌حل معادلات درجهٔ اول‌ودوم را می‌شناختند (نویگه‌باور[2]، ص ۴۰ـ۴۲)، بلکه برخی از معادلات از درجات بالاتر، و حـتی حالات خـاصی از مـعادلات درجـهٔ هشـتم، را حـل مـی‌کردند (همان، ص ۴۸). با این حال، آنچه از این تـمدنها بـه دست مـا رسیده، فقط مجموعه‌هایی از مسـائل عـددی است. راه‌حـلها، هرچند در مورد معادلات درجهٔ اول و دوم کلیت دارند، از طریق مسائل عددی خاص بیان می‌شوند و معلوم نیست به چه طریق به دست آمده‌اند و در مسائلی که درجهٔ آنها از دو بیشتر است، دستورهای حل معادلات تنها در موارد خاص کاربرد دارند.

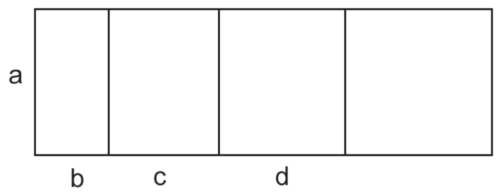
از عصر زرین ریاضیات یونانی (قرنهای پـنجم و چـهارم و سوم پیش از میلاد)، هیچ اثری در زمینهٔ جبر به دست ما نرسیده است. به نظر می‌آید که علاقهٔ یونانیان بـه بـرهان دقـیق، و نـیز کشف کمیات ناهمسنجه[3]، توجه ریاضیدانان یونانی را یکسره به هندسه معطوف کرده بوده است. در فلسفهٔ یونانی، به صورتی که در آثار ارسطو آمده، و تأثیر آن در آثار ریاضیدانان یونانی چون اقلیدس و ارشمیدس و آپولونیوس دیده میشود، کمیتها بـه دو دستهٔ کاملاً متمایز تقسیم می‌شوند: اعداد، که منظور از آن اعداد طبیعی است (یعنی مضربهای واحد؛ خودِ واحـد تـجزیه‌ناپذیر محسوب می‌شود) و مقادیر، که کمیّات هندسی (طول و سطح و حجم)اند. مفهوم کلی «عدد حـقیقی» (شـامل اعـداد گـویا و گُـنگ) بـی‌معنی است، اعـداد گـویا (کسـرها) بـه صـورت «نسبت»هایی میان اعداد طبیعی تعریف می‌شوند و موجوداتی که امروزه عدد گنگ می‌نامیم با پاره‌خط، و نسبت میان آنها بـا نسبت میان پاره‌خطها، نمایش داده می‌شوند. با این حال، وجود برخی روشها در کتاب *مخروطات* آپولونیوس (قرن سوم پیش از میلاد) و برخی از قضایا در مقالات دوم و ششم و دهم کـتاب *اصول* اقلیدس (تألیـف شـده در حـدود ۳۰۰ پـیش از مـیلاد) گروهی از مورخان را معتقد کرده است که یونانیان از نوعی جبر هندسی استفاده می‌کرده‌اند. اصطلاح «جبر هندسی» را نخستین بار ریاضیدان دانمارکی زویتن[4] در کتاب خود به نـام < نـظریهٔ مقاطع مخروطی در دوران باستان >[5] ابداع کـرده است. زویـتن دریافت که در کـتاب *مـخروطات* آپـولونیوس، خـواص اصـلی مقاطع مخروطی از راه عملیاتی بر روی پاره‌خطها از یک سو، و سطوح از سوی دیگر، بیان شده است که همان خواص جمعی و ضربی را دارند کـه امـروزه در کـتابهای جـبر آمـوخته مـی‌شود (واردن، ص ۷۵). مفهوم جبر هندسی را بـا مـثالهایی از کـتاب *اصول* اقلیدس بهتر می‌توان توضیح داد. مثلاً قضیهٔ اول از مقالهٔ دوم *اصول* (ج ۱، ص ۳۷۵) به این صورت است:

هرگاه دو خط مستقیم داشته باشیم و یکی از آنها را به تعداد دلخواهی پاره‌خط تقسیم کنیم، مستطیلی که از دو خط مستقیم تشکیل شود، برابر با مجموع مستطیلهایی است که از پـاره‌خط دیگر و هریک از قطعات تشکیل می‌شود.

اگر قطعات پاره‌خط اصلی را به b و c و... و پاره‌خط دیگر را به a نمایش دهیم، این قضیه خاصیت پخش‌پذیری جمع نسبت به ضرب را بیان می‌کند (شکل ۱):

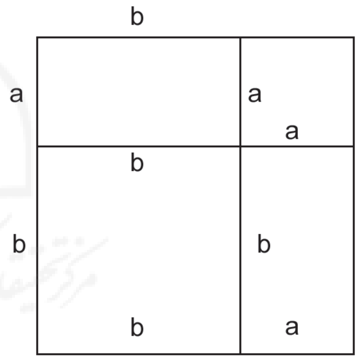
$$a(b + c + \ldots) = ab + ac + \ldots$$

1. Bartel van der Waerden
2. Neugebauer
3. incommensurable
4. H. G. Zeuthen
5. *Die Lehre von den Kegelschnittenin Altertum*



شکل ۱

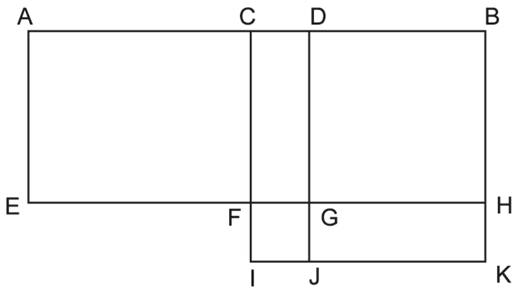
همچنین قضیهٔ چهارم از مقالهٔ دوم *اصول* (ج ۱، ص ۳۷۹) می‌گوید که اگر پاره‌خطی را به دو بخش تقسیم کنیم، مربعی که بر روی کل پاره‌خط ساخته می‌شود مساوی است با مجموع مربعهایی که بر روی هریک از دو بخش ساخته می‌شوند و دو مستطیلی که از دو بخش به دست می‌آید. هرگاه طول دو پاره‌خط را با نمادهای a و b نمایش دهیم، این قضیه با اتحاد جبری $(a + b)^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab$ معادل است (شکل ۲).



شکل ۲

مهم‌تر از این دو، از لحاظ تاریخ علم جبر، قضیهٔ پنجم از مقالهٔ دوم کتاب *اصول* (ج ۱، ص ۳۸۲) است: هرگاه پاره‌خط AB را در نقطهٔ C به دو قسمت مساوی AC و CB و در نقطهٔ D به دو قسمت نامساوی AD و DB تقسیم کنیم، مستطیلی که یک ضلع آن AD و ضلع دیگری آن DB باشد به اضافهٔ مربعی که هر ضلع آن CD باشد مساوی است با مربعی که روی CB (نصف پاره‌خط اصلی) ساخته شود.

این قضیه بدین معنی است که در شکل ۳، مستطیل AEDG به اضافهٔ مربع FGIJ مساوی‌است با مربع CBIK. چنانکه در این شکل فرض کنیم که $AB = a$ و $DB = x$، آنگاه این قضیه به معادلهٔ $ax - x^۲ = b^۲$ منجر می‌شود (همان، ج ۱، ص ۳۸۳). اما چنین تعبیری مستلزم این اعتقاد است که هر طولی را می‌توان با



شکل ۳

عددی نمایش داد، درحالی‌که در سنّت یونانی هرچند هر عددی را با طولی نمایش می‌دادند، معتقد نبودند که در برابر هر طولی هم عددی وجود داشته باشد. همچنین است ترسیماتی که در قضایای بیست و هشتم و بیست و نهم از مقالهٔ ششم کتاب *اصول* (ج ۲، ص ۲۶۱ـ۲۶۷) خواسته شده و معادل با حل یک معادلهٔ درجهٔ دوم است.

به همین دلیل، چه در *اصول* اقلیدس و چه در *مخروطات* آپولونیوس، مساحت مستطیل هیچ‌گاه به صورت حاصل ضرب اضلاع آن نشان داده نمی‌شود، بلکه مساحت هر شکل با مساحتی دیگرسنجیده‌می‌شود.ازاین‌رو، هرچند آپولونیوس،در *مخروطات*، خواص مقاطع مخروطی را از طریق مفهومی به‌نام نشانه[1] بررسی می‌کند که به‌مفهوم امروزیِ معادلهٔ مقطع مخروطی بسیار نزدیک است، بااین‌حال، وی همواره نشانه را به‌صورت برابری دو سطح بیان می‌کند. بنابراین، تعبیر جبری قضایای فوق توجیهی ندارد. همچنین، هرچند برخی از ترسیمات هندسی مقالهٔ ششم کتاب *اصول* نیز، هرگاه به زبان نمادهای جبری ترجمه شوند، به حل معادلاتی از مرتبهٔ اول و دوم منجر می‌شوند، اما تعبیر جبری این قضایا نیز با همان مشکل پیشین مواجه است. همچنین است مقالهٔ دهم *اصول*، که بسیاری از قضایای پیچیدهٔ آن، به زبان جبری، معادل با گویا کردن اعداد گنگ است. با این حال، مسئلهٔ جبر هندسی یونانی، و به‌ویژه تعبیر مقالات «جبری» کتاب *اصول* اقلیدس، در بین مورخان ریاضیات همچنان مورد بحث است.

در این میان یک استثنای مهم وجود دارد و آن *کتاب الحساب*[2] دیوفانتوس اسکندرانی[3] است. موضوع این کتاب که تاریخ دقیق تألیفش معلوم نیست اما احتمالاً در قرن سوم میلادی تألیف شده (هیث، ج ۲، ص ۴۴۸)، «لوژیستیک»[4] یا شاخهٔ محاسباتی حساب است که در حل مسائل عملی از آن استفاده می‌شود» (*زندگینامهٔ علمی دانشوران*[5]، ج ۴، ص ۱۱۱). در ریاضیات یونانی، «لوژیستیک» مجموعه‌ای از فنون محاسبه

1. symptoma 2. *Arithmetica* 3. Diophantus of Alexandria 4. logistik 5. *Dictionary of scientific biography*

بود و معمولاً در مقابل «فن حساب»[1] قرار می‌گرفت که دانشی برهانی محسوب می‌شد. *کتاب الحساب* در اصل در هفت مقاله بوده که اصل یونانی مقالات اول تا سوم و ترجمهٔ عربی چهار مقالهٔ دیگر آن در دست است (← دیوفانتوس اسکندرانی، *صناعة الجبر*، مقدمهٔ راشد، ص ۸ـ۱۳)، و مجموعه‌ای است از مسائل معیّن (معادلات یک مجهولی یا دستگاههایی از معادلات که شمار مجهولات آنها به‌تعداد معادلات است) و نامعیّن (سیال، معادله یا دستگاههایی از معادلات که شمار مجهولات آنها بیش از تعداد معادلات است). دیوفانتوس در تنظیم این معادلات ترتیب خاصی را رعایت نکرده است. در مورد هر معادله یا هر دستگاه از معادلات، دیوفانتوس راه‌حل را عرضه می‌کند و در مورد معادلات سیال جوابهای گویا را به‌دست می‌آورد و در این کار غالباً به تغییر متغیرهای هوشمندانه و روشهای بدیع برای کاستن از درجهٔ معادلات متوسل می‌شود (*زندگینامهٔ علمی دانشوران*، همانجا). گذشته از این، دیوفانتوس نامهایی برای توانهای مختلف اعداد ابداع کرده است و نیز نخستین نشانه‌های مختصر نویسی در جبر (انتخاب برخی از حروف الفبای یونانی برای نمایش توانهای مجهول) در کار او دیده می‌شود. همچنین، دیوفانتوس دو عمل را تعریف می‌کند که برای ساده کردن معادلات انجام می‌گیرد (واردن، ص ۹۸). یکی ازاین‌دو عمل بعدها در کتاب خوارزمی «جبر» و دیگری «مقابله» نام می‌گیرد (*د. اسلام*، چاپ دوم، ذیل «الجبر و المقابله»).

خوارزمی و پیدایش علم جبر. نخستین اثر مستقل در جبر کتابی است از محمدبن‌موسی خوارزمی که به کتاب *المختصر فی حساب الجبر و المقابلة* معروف است (هرچند کلمهٔ «المختصر» در عنوان آن دیده نمی‌شود) و در زمان خلافت مأمون (بین سالهای ۱۹۸ و ۲۱۸) تألیف شده است (خوارزمی، ص ۱۵). با اینکه خوارزمی (ص ۱۶) تصریح می‌کند که هدف او نوشتن کتابی است که در مسائل عملی مربوط به تقسیم میراث و مسّاحی و تجارت به کار آید، و بخشهایی از کتاب نیز به این گونه مسائل اختصاص دارد، اهمیت این کتاب عمدتاً در ارزش نظری آن است. زیرا در این کتاب است که علم جبر، به صورت یک علم مستقل با واژگان و مفاهیم و روشهای خاصی که آن را از حساب و هندسه متمایز می‌کنند، متولد می‌شود. این امر از روشی که خوارزمی در معرفی موجودات جبری به‌کار می‌برد پیداست.

وی (همانجا) نخست عدد را، به سنّت یونانی، به صورت ترکیبی از واحدها تعریف می‌کند، سپس سلسله‌های زیر را می‌سازد:

۱، ۲، ۳،...، ۹، ۱۰

۱۰+۱، ۱۰+۲، ۱۰+۳، ...، ۱۰+۹، ۲×۱۰

۲×۱۰+۱، ۲×۱۰+۲،...، ۲×۱۰+۹، ۱۰×۳

.
.
.

$۱۰^{۲} = ۱۰\times۱۰$

.
.
.
.

$۱۰^{۲}\times۲$

.
.
.

$۱۰^{۳} = ۱۰^{۲}\times۱۰$

آنگاه خوارزمی، از روی قیاس با این سلسله‌های عددی، موجوداتی را که در علم جبر به کار می‌رود تعریف می‌کند. این موجودات عبارت‌اند از شیء (مقدار مجهول یا x) که به قیاس با ضریب بخش دهگانی (ضریب ۱۰) در یک عدد دو رقمی ساخته می‌شود، مال (توان دوم مقدار مجهول یا $x^۲$) که به قیاس بخش صدگانی (ضریب $۱۰^{۲}$) در یک عدد صدگانی ساخته می‌شود، و عدد یا درهم (مقدار معلوم)، که متناظر است با ارقام ۱ تا ۹ در سلسلهٔ اعداد دهگانی. به این ترتیب، موجودات جبری شکل تعمیم‌یافته‌ای از اعداد حسابی به نظر می‌آیند. یعنی عدد مطلق (مفرد) متناظر است با یکی از اعداد ۱ تا ۹ در دستگاه دهگانی، تک‌جمله‌ای مرتبهٔ اول ax (a و x اعداد گویای مثبت‌اند) متناظر است با عدد $۱۰m$، که در آن m یکی از ارقام ۱ تا ۹ است و تک‌جمله‌ای مرتبهٔ دوم $ax^۲$ متناظر است با عدد $۱۰^{۲}m$. سپس خوارزمی (ص ۱۷ـ۱۸) به تقسیم‌بندی معادلاتی می‌پردازد که از ترکیبهای مختلف این موجودات با یکدیگر حاصل می‌شود. به این طریق شش دسته معادله، از درجات اول و دوم، به‌دست می‌آید:

۱) شیء‌هایی مساوی با عددی است: $ax = b$،

۲) مالی مساوی با عددی است: $x^۲ = a$،

۳) مالی مساوی با شیء‌هایی است: $x^۲ = ax$،

۴) مالی به اضافهٔ شیء‌هایی مساوی با عددی است: $x^۲ + ax = b$،

۵) مالی به اضافهٔ عددی مساوی شیء‌هایی است: $x^۲ + a = bx$،

۶) مالی مساوی با شیء‌هایی به‌اضافهٔ عددی است: $x^۲ = bx + a$،

ضریبهای a و b همواره اکیداً مثبت (مثبت و مخالف صفر)اند. در نمونه‌هایی که خوارزمی ذکر می‌کند، همهٔ ضرایب اعداد صحیح‌اند اما، چنانکه خواهیم دید، جانشینان او معادلاتی با

1. arithmetike techne

ضرایب کسری و حتی گنگ را هم در نظر می‌گیرند.

خوارزمی (ص ۱۸) معادلات (۴) تا (۶) را مقترنات نام داده است و جبردانان پس از او معادلات (۱) تا (۳) را مفردات نامیده‌اند. این شش معادله، در واقع تمامی حالات معادلات درجهٔ اول و دوم را، به شرط مثبت بودن ضرایب، نشان می‌دهند. چنانچه معادله‌ای به صورتی جز یکی از این شش صورت داده شده باشد، آن را با یکی از دو عمل «جبر» یا «مقابله»، یا با هر دو عمل، به یکی از این شش صورت نرمال تبدیل می‌کنیم. مثلاً معادلهٔ $x^۲ - ۷x + ۴ = ۶$ از راه «جبر» (افزودن مقدار ۷x به دو سوی معادله) به‌صورت $x^۲ + ۴ = ۷x + ۶$ و از راه مقابله (حذف مقدار ۴ از دو سوی معادله) به صورت $x^۲ = ۷x + ۲$ درمی‌آید که نمونه‌ای است از معادلهٔ (۶). همچنین هرگاه ضریب $x^۲$ عددی مخالف یک باشد، با تقسیم طرفین معادله به این عدد، معادله به صورت نرمال درمی‌آید.

از این معادلات، یکی (شمارهٔ ۱) از درجهٔ اول و یکی دیگر (شمارهٔ ۳) قابل تبدیل به معادلهٔ درجهٔ اول است. راه‌حل این دو معادله بدیهی است (خوارزمی البته ریشهٔ صفر را در مورد معادلهٔ شمارهٔ۳ به حساب نمی‌آورد) و حل معادلهٔ شمارهٔ ۲ به استخراج جذر یک‌عدد منجر می‌شود. در مورد سه‌معادلهٔ دیگر، خوارزمی دستور (الگوریتم) کلی حل معادله را به دست می‌دهد، منتهی در مورد هر معادله راه استفاده از این الگوریتم را با استفاده از یک مثال عددی که آن را «الگو» («باب») می‌نامد نشان می‌دهد. به عنوان مثال، دستور حل معادلهٔ (۴) به صورت زیر است: تعداد شیءها (ضریب x یا a) را نصف می‌کنیم، حاصل را در خودش ضرب می‌کنیم، مقدار به دست آمده را با تعداد درهمها (b) جمع می‌کنیم، از مقداری که به‌این طریق به‌دست می‌آید جذر می‌گیریم، و از حاصل، نصف تعداد شیءها را کم می‌کنیم. عدد به‌دست آمده مقدار مجهول است (← همان،ص ۱۹). به عبارت دیگر، راه‌حل خوارزمی $x = \sqrt{b + \frac{۱}{۴}a^۲} - \frac{۱}{۲}a$، در واقع عبارت است از تبدیل کردن عبارت دست چپ معادله به یک مربع کامل از راه افزودن مقدار $\frac{۱}{۴}a^۲$ به دو طرف معادله. به عبارت دیگر، الگوریتم خوارزمی را به این صورت می‌توان نشان داد:

$$x^۲ + ax = b$$
$$\downarrow$$
$$x^۲ + ax + \left(\frac{۱}{۲}a\right)^۲ = b + \frac{۱}{۴}a^۲$$
$$\downarrow$$
$$\left(x + \frac{۱}{۲}a\right)^۲ = b + \frac{۱}{۴}a^۲$$
$$\downarrow$$
$$x + \frac{۱}{۲}a = \sqrt{b + \frac{۱}{۴}a^۲}$$
$$\downarrow$$
$$x = \sqrt{b + \frac{۱}{۴}a^۲} - \frac{۱}{۲}a$$

این معادله همواره یک جواب مثبت دارد. پیداست که خوارزمی در این الگوریتم تلویحاً از اتحاد $(p + q)^۲ = p^۲ + q^۲ + ۲pq$ استفاده کرده است. در مورد معادلات (۵) و (۶) روش خوارزمی اساساً یکسان است، جز اینکه در مورد معادلهٔ $x^۲ + a = bx$ قید می‌کند که معادله ممکن است دو جواب مثبت داشته باشد یا جواب نداشته باشد (ص ۲۱).

جبر دو جمله‌ایها. بخش دیگری از کتاب خوارزمی (ص ۲۷ـ۳۴) که تنها در چند دههٔ اخیر مورد توجه قرار گرفته و با این حال از لحاظ تحول علم جبر بسیار حائزاهمیت است، بخشی است که به‌بیان سه عمل اصلی (جمع، تفریق و ضرب) بر روی دوجمله‌ایها اختصاص دارد. خوارزمی ابتدا به بیان قواعدی در مورد جمع و تفریق یک جمله‌ایها می‌پردازد که معادل است با دستورهای

$$ax + bx = (a+b)x$$

و

$$ax - bx = (a - b)x \quad (\text{به شرط } a > b)$$

برای بیان قواعد ضرب دو جمله‌ایها، وی نخست (ص ۲۷ـ۲۸) قاعدهٔ ضرب دو عدد دو رقمی در مبنای ۱۰ را به صورت زیر شرح می‌دهد:

$$\overline{ab}_{۱۰}.\overline{cd}_{۱۰} = (۱۰a + b).(۱۰c + d) =$$
$$ac.۱۰^۲ + ac.۱۰ + bc.۱۰ + bd$$

سپس (ص ۲۸ـ۳۰) قاعدهٔ ضرب دو دو جمله‌ای را بیان می‌کند:

$$(ax + b).(cx + d) = ac.x^۲ + ad.x + bc.x + bd$$

$$(ax + b).(cx - d) = ac.x^۲ + bc.x - ad.x - bd$$

$$(ax - b).(cx - d) = ac.x^۲ - ad.x - bc.x + bd$$

از شیوهٔ بیان خوارزمی پیداست که وی یک دو جمله‌ای را به صورت یک عدد دورقمی در مبنای x در نظر می‌گیرد، و آنگاه قواعد ضرب دو عدد دو رقمی در مبنای ۱۰ را دربارهٔ این عدد دو رقمی در مبنای x به کار می‌برد:

$$(ax + b).(cx + d) = \overline{ab}_x.\overline{cd}_x$$

همچنین در این روابط، خوارزمی، به طور ضمنی، قواعدِ

$$(+a) \times (+b) = +(ab)$$

$$(+a) \times (-b) = -(ab)$$

$$(-a) \times (+b) = -(ab)$$

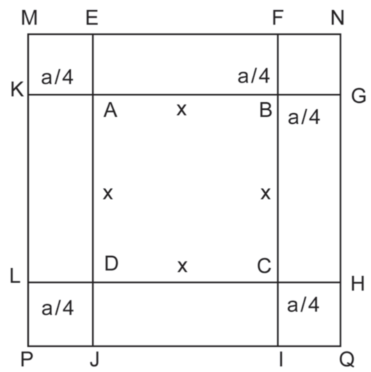
$$(-a) \times (-b) = +(ab)$$

را، که در آن $a,b > ۰$، به دست می‌دهد. با این حال، مفهوم عدد منفی در کتاب خوارزمی وجود ندارد.

بدین‌ترتیب، برخلاف ریاضیات بابلی و «جبرِ هندسی»

یونانی، که برای حل چند حالت خاص بـه «انـواع انـدیشه‌های بدیع» متوسل می‌شدند، در کتاب جبر و *مقابلهٔ* خوارزمی، همهٔ انواع معادلات به «چند نوع استاندارد تـحویل مـی‌شود کـه بـه کمک چند قاعده قابل حل‌اند» (ــه گاندز[1]، ص ۵۴۲). پیش از خوارزمی، استخراج مـجهول از راه عـملیات حسـابی بـر روی داده‌های عددیِ مسئله انجام می‌گرفت، اما خوارزمی، با معرفی دو جمله‌ایهای جبری و عملیات بر روی آنها، در واقع موجودات جدیدی را معرفی می‌کند که عدد نیستند ولی از روی الگـوی اعداد ساخته می‌شوند. البته خوارزمی این موجودات را تعریف دقیق نمی‌کند. «بدین‌طریق، جبر در آغـاز، بـه صـورت نـوعی حساب ظاهر می‌شود که از «لوژیستیک» کلی‌تر است ــ زیرا به کمک جبر می‌توان مسائل «لوژیستیک» را دقیق‌تر حل کرد ــ و نیز از «هندسهٔ متریک هم کلی‌تر است» (راشد، ۱۹۹۷، ص ۳۴). این کار خوارزمی سرآغاز جریانی است که رشدی راشد (۱۹۸۴، ص ۳۰) آن را «حسابی کردن جبر» می‌نامد. بدین معنی که ایـن علم به صورت نوعی حسابِ تعمیم یافته و کلی ظاهر می‌شود که قواعد خود را از روی قواعد حساب می‌سازد. این کار بعدها در مکتب کَرَجی به اوج خود می‌رسد. از سوی دیگر، از همان کتاب خوارزمی، کوششی بـرای آنکـه ایـن قـواعـد بـه کـمک ترسیمات هندسی بُرهانی شوند، دیده می‌شود.

توجیه هندسی الگوریتمها. بخشی از کتاب خوارزمی (ص ۲۱ـ ۲۷) به توجیه هندسی دستورهای حـل مـعادلات (۴) تـا (۶) اختصاص دارد. این کار، هرچند آن را نمی‌توان اثبات به معنای متعارف نامید، به‌هرحال کوششی است برای آنکه الگوریتم از راه رسم یک شکل هندسی تأییدشود. خوارزمی این شکلها را «علتی» می‌نامدکه «دلیل نصف‌کردنِ ضریب‌مجهول‌را بیان‌می‌کند». شکل ۴ استدلال‌خوارزمی‌رادرموردمعادلهٔ‌شمارهٔ ۴ نشان‌می‌دهد(ص ۲۲):



شکل ۴

در این شکل، هر ضلع مربع ABCD مساوی است با مقدار مجهول x و مساحت این مربع مسـاوی است بـا x^{2}. ضـلعهای هــریک از مســتطیلهای ABEF و BCGH و CDIJ و DAKL برابرند با x و $\frac{a}{4}$. بنابراین، مجموع مربع میانی و چهار مستطیل برابر است با $x^{2} + ax$، که طبق فرض مسئله برابر است با b. اگر به این مجموع چهار مربع گوشه‌ای را اضافه کنیم، مـربع بـزرگِ حاصل از یک سو برابر است با $x^{2} + ax + \frac{a^{2}}{4}$ یا $(x+\frac{a}{2})^{2}$ و از سوی دیگر برابر است با $b + \frac{1}{4}a^{2}$. بنابراین

$$(x + \frac{a}{2})^{2} = b + \frac{1}{4}a^{2}$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{b + \frac{1}{4}a^{2}}$$

$$x = \sqrt{b+\frac{1}{4}a^{2}} - \frac{a}{2}$$

جبر از خوارزمی تا کرجی. اهـمیت کـتاب جـبر و *مـقابلهٔ* خوارزمی، به‌رغم حجم کـم وسـادگی ظـاهری مـطالب آن، در همان قرن سوم شناخته شد. نشانهٔ این توجه رساله‌هایی است که در قرنهای سوم و چهارم در این موضوع نوشته شده است که هرچند بسیاری از آنها از میان رفته، اما بعضی از آنها که به دست ما رسیده بر تأثیر خوارزمی و کتاب او گواهی می‌دهند. برخی از این آثار از دست رفته عنوان «الجبر و المقابلة» دارند، مانند کتاب *الجـبر و المـقابلة* ابـوحنیفه دیـنوری (مـتوفی ۲۹۰؛ ابـن‌ندیم، ص ۸۶؛ حاجی‌خلیفه، ج ۲، ستون ۱۴۰۷) و نیز کتاب احمدبن محمدبن طیّب سرخسی (متوفی ۲۸۶؛ــه حاجی‌خلیفه، همانجا) و برخی دیگر شرح بر جبر و *مقابلهٔ* خوارزمی‌اند، مـانند شـرح *الجبر و المقابلة للخوارزمی* از سنان‌بن فتح حرانی* (ابـن‌ندیم، ص ۳۳۹ـ۳۴۰). در واقع از سنان‌بن فتح رسالـه‌ای در جبر، به نام *کتابٌ فیه الکعبُ و المالُ و الاعدادُ المتناسبة*، باقی مانده (راشد، ۱۹۹۷، ص ۳۱، پانویس ۴)، اما معلوم نیست که این رساله همان شرح کتاب خوارزمی باشد. در این رساله معادلاتی کـه شـامل جمله‌های ax^{n+2p} و bx^{n+p} و cx^{n} هستند به معادلات درجهٔ دوم تبدیل شده‌اند (انبوبا، ص ۷۸ـ۷۹) و نیز شرح *کـتاب مـحمدبن موسی الخوارزمی فی الجبر* از عـبداللّـه‌بن حسـین صـیدنانی (ابن‌ندیم، ص ۳۳۸)، و *تفسیر کتاب الخـوارزمـی فـی الجـبر و المقابلة* از ابوالوفای بوزجانی* (همان، ص ۳۴۱). غالب این آثار در همان قرن سوم و اثر اخیر پیش از سال ۳۷۷ که سال تألیف نهایی *الفهرست* ابن‌ندیم است نوشته شده‌اند.

در *الفهرست* ابن‌ندیم (ص ۳۳۴) کتابی به نام *کتاب الجبر و المقابلة* به سَنَد (یاسِنْد)بن علی، ریاضیدان معاصر خوارزمـی، نسبت داده شده است، اما چون ابن‌ندیم به سندبن علی* کتابی

1. Gandz

هم به نام *کتاب الحساب الهندی* نسبت می‌دهد (همانجا)، این احتمال هست که زندگینامهٔ او با زندگینامهٔ خوارزمی، که در *الفهرست* درست پیش از سندبن علی آمده (← ص ۳۳۳)، در استنساخ کتاب *الفهرست* درهم آمیخته و برخی از آثار خوارزمی جزء آثار سندبن علی آمده باشد (← سوتر[1]، ص۱۳ـ ۱۴؛ نیز ← قربانی، ص ۲۷۴ـ۲۷۵)، بویژه که در نسخ موجود *الفهرست* هیچ‌یک از دو *کتاب الحساب الهندی* و *کتاب الجبر و المقابلة*، که به گواهی منابع دیگر مسلّماً از خوارزمی است، جزء آثار خوارزمی ذکر نشده است. سزگین (ج۵، ص۲۴۳) به نقل از پل سبَث[2] آورده که نسخه‌ای از کتاب سندبن علی در حلب موجود بوده است. اما ممکن است این قول، مانند پاره‌ای دیگر از گفته‌های سبث، شتابزده و بر پایهٔ وارسی ناقص نسخه باشد. به هر حال، این نسخه اکنون ظاهراً موجود نیست.

از میان آثار جبری بازمانده از این دوران، برخی که اندکی پس از زمان خوارزمی تألیف شده است بر کوشش ریاضیدانان آن زمان برای تکمیل کار خوارزمی دلالت دارند. ریاضیدانی به نام عبدالحمیدبن واسع ابن‌ترک ختلی (یا جیلی، یا جبلی) رساله‌ای در جبر تألیف کرده بوده که تنها بخشی از آن که به اثبات هندسی الگوریتمها اختصاص دارد به دست ما رسیده است (← صاییلی، ۱۹۸۵). در این بخش، ابن‌ترک برخی از براهین هندسی خوارزمی را دقیق‌تر کرده و به‌ویژه دربارهٔ وجود ریشه (یعنی ریشهٔ مثبت برخی از «مقترنات») بحث کرده و حالاتی را که معادله ریشهٔ مثبت ندارد مشخص کرده است. به روایت حاجی‌خلیفه (ج ۲، ستون ۱۴۰۸) نوهٔ ابن‌ترک، به نام ابوبرزه، که او هم ریاضیدان بوده (ابن‌ندیم، ص ۳۳۹) مدعی فضل تقدم نیای خود بر خوارزمی در ابداع علم جبر شده بوده و ابوکامل شجاع‌بن اَسلَم، در مقدمهٔ دو اثر خود، که ظاهراً اکنون از میان رفته‌اند، این ادعا را رد کرده بوده است. آنچه احتمال تقدم ابن‌ترک را بر خوارزمی کاهش می‌دهد این است که ابن‌ندیم (ص ۳۳۹) ابوالفضل عبدالحمیدبن واسع‌بن ترک ختلی را در زمرهٔ «الحُسّاب و اصحاب‌الاعداد المُحدَثون»، و پس از طبقهٔ خوارزمی، ذکر می‌کند. با این حال بلاذری (متوفی ح ۲۷۹) از او با عبارت «حَدَّثنی عبدالحمیدبن واسع الختلی الحاسب» روایت می‌کند (۱۴۰۷، ص ۴۰۷). اما چون بلاذری از خوارزمی هم مستقیماً روایت می‌کند (← ۱۳۹۸، ج ۳، ص ۲۶۴ـ۲۶۵)، می‌توان نتیجه گرفت که ابن‌ترک معاصر خوارزمی و احیاناً کمی از او جوان‌تر بوده است (← جیلی*، عبدالحمید). ریاضیدانان دیگر، مانند سنان‌بن فتح نیز بر فضل تقدم خوارزمی گواهی داده‌اند (راشد، ۱۹۹۷، ص ۳۱، پانویس ۴).

کوشش برای تعبیر هندسی دقیق معادلات جبری درجهٔ دوم در *رسالة فی تصحیح مسائل الجبر بالبراهین الهندسیة* (← لوکی[3]، ص ۱۱۰ـ۱۱۲؛ راشد، ۱۹۹۷، ص ۳۵) اثر ثابت‌بن قرّهٔ حَرّانی (۲۲۱ـ۲۸۸) به‌صورت جدّی‌تری ادامه‌می‌یابد. واژهٔ «تصحیح» را در عنوان این رساله باید به معنای «اثبات صحت» یا اثبات گرفت، و بنابراین هدف ثابت این است که نشان دهد که الگوریتمهایی که خوارزمی برای حل معادلات درجهٔ دوم به دست داده درست‌اند. اثباتهای ثابت هندسی است، اما برخلاف خوارزمی و ابن‌ترک که تعبیر خود را بر ترسیم اشکال هندسی استوار می‌کنند، وی مستقیماً از قضایای پنجم و ششم مقالهٔ دوم *اصول* اقلیدس استفاده می‌کند و میان طولهایی که در این قضایا وارد می‌شوند و ضرایب «مقترنات» تناظری مستقیم برقرار می‌کند.

ابوکامل شجاع‌بن اَسلَم حاسب مصری، که در نیمهٔ دوم قرن سوم می‌زیسته (← سزگین، ج ۵، ص ۲۲۷ـ۲۸۱) گذشته از کتابی به‌نام *کمالُ الجبر و تمامُه و الزیادةُ فی اصولِه* (حاجی خلیفه، ج ۲، ستون ۱۴۰۷) که ظاهراً از میان رفته است، کتابی به نام *الجبر و المقابلة* دارد که تنها یک نسخهٔ خطی عربی و یک ترجمهٔ عبری (← لوی[4]، ۱۹۶۶) و یک ترجمهٔ لاتینی از آن باقی مانده است. ابوکامل در مقدمهٔ این کتاب، انگار می‌خواهد به ادعاهای ابوبرزه جواب بدهد، خوارزمی را نخستین کسی می‌داند که در جبر و مقابله کتابی تألیف کرده و اقرار به فضل تقدم او را وظیفهٔ همهٔ محاسبان می‌داند. کتاب ابوکامل در سه بخش است. بخش اول به بررسی همان معادلات خوارزمی اختصاص دارد، با این تفاوت که هریک از مقترنات را یک بار برای x و یک بار برای x^2 حل می‌کند و در حل هر معادله حالات ممکن و ممتنع (یعنی حالتی که معادله ریشهٔ مثبت ندارد) و نیز حالتی را که معادله فقط یک ریشه (یعنی ریشهٔ مضاعف) دارد، برحسب مقدار ضرایب مشخص می‌کند. همچنین ابوکامل معادلاتی با ضرایب گنگ را هم در نظر می‌گیرد (ابوکامل، ۱۴۰۶ الف، مقدمهٔ هوخندایک، ص ۱ـ۲). ابوکامل در اثباتهای هندسی خود (۱۴۰۶ الف، ص ۱۰) نیز صراحتاً از دو قضیهٔ مقالهٔ دوم *اصول* اقلیدس استفاده می‌کند و، مانند خوارزمی، این قضایا را «علت» درستی الگوریتم موردنظر می‌خواند و می‌نویسد (ص ۷): «ما علت این [الگوریتمها] را با قضایای هندسی بیان می‌کنیم تا هندسه‌دانانی که در کتاب اقلیدس نظر کرده‌اند آن را دریابند». بخش دوم کتاب ابوکامل مختص محاسبهٔ برخی از مقادیر هندسی، و از جمله ضلع پنج‌ضلعی و ده‌ضلعی و پانزده‌ضلعیِ محاط در دایره برحسب قطر آن است. روش هندسی به دست آوردن طول

1. Suter 2. Paul Sbath 3. Luckey 4. Levey

ضلع پنج ضلعی منتظم محاط در دایره در قضیهٔ یازدهم از مقالهٔ سیزدهم *اصول* اقلیدس (ج ۳، ص ۴۶۱ـ۴۶۶) بیان شده، اما ابوکامل مقدار عددی ضلع این چند ضلعیها را به دست می‌آورد، بدین‌معنی که به دست آوردن ضلع چند ضلعی را به حل یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌کند. مثلاً به دست آوردن ضلع پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۱۰ به حل معادلهٔ دومجذوری $x^4 + ۳۱۲۵ = ۱۲۵x^2$ منجر می‌شود (ابوکامل، ۱۴۰۶ الف، ص ۱۳۴ـ۱۳۵). ابوکامل با این کار نه تنها معادلات از درجهٔ چهارم (ولی قابل تبدیل به معادلات درجهٔ دوم) را در نظر می‌گیرد بلکه ریشهٔ این معادلات را هم که عموماً مقادیر گنگ است به صورت عدد تلقی می‌کند. در واقع، او میان دو سنّت یونانی، که یکی محاسبهٔ مقدار تقریبی مقادیر هندسی است، مانند محاسبهٔ وتر زاویهٔ یک درجه به صورتی که مثلاً در کتاب *مجسطی* بطلمیوس[1] (ص ۴۸ـ۵۶) دیده می‌شود، و دیگری ترسیم دقیق این مقادیر از راه هندسی، پُلی می‌زند و با این کار این مقادیر را ریشهٔ یک معادلهٔ جبری درجهٔ دوم، یا معادلهٔ دو مجذوری، تلقی می‌کند. در مقالهٔ سوم، ابوکامل به حل چند معادلهٔ سیال و چند دستگاه معادلات سیال می‌پردازد. در این مقاله تأثیر *کتاب الحساب* دیوفانتوس، که اندکی پیش از زمان ابوکامل به عربی ترجمه شده بود محسوس است. بر *کتاب الجبر و المقابلهٔ* ابوکامل، علی‌بن احمد عِمرانی* (متوفی ۳۴۴) شرحی نوشته بوده (ابن‌ندیم، ص ۳۴۱) که اکنون در دست نیست. از ابوکامل رساله‌ای نیز به نام *الطرائف فی الحساب* (← ابوکامل، ۱۴۰۶ ب) در دست است که موضوع آن حل معادلات سیال مرتبهٔ اول به صورت $ax + by + cz + … + pt = m$ است. ابوکامل، بر خلاف دیوفانتوس، تنها به جوابهای صحیح این معادلات توجه دارد و نه به جوابهای گویای آنها.

تأثیر زبان جبری خوارزمی در *کتاب معرفة مساحة الاشکال البسیطة و الکریة* بنوموسی* (← بنوموسی، ص ۵۸ـ۱۳۷) نیز محسوس است، که پیش از سال ۲۵۹ (سال درگذشت محمدبن موسی که بزرگ‌ترین سه برادر است) تألیف شده است. بنوموسی در این اثر، بر خلاف سنّت ریاضیات اقلیدسی و ارشمیدسی، مساحت یا حجم یک شکل را نه برحسب مساحتی دیگر بلکه به صورت حاصل‌ضرب بیان می‌کنند (*دائرةالمعارف بزرگ اسلامی*، ج ۱۲، ص ۶۹۴) و، به بیان دیگر، مقادیر هندسی را به صورت عدد در نظر می‌گیرند. این امر اگر هم بر تأثیر مستقیم کتاب خوارزمی دلالت نکند، حاکی از تأثیر غیرمستقیم علم نوپای جبر در زبان ریاضی آن روز است. این تأثیر در ترجمهٔ *کتاب الحساب* دیوفانتوس هم دیده می‌شود. این کتاب، که بنا بر استدلال راشد (دیوفانتوس اسکندرانی، مقدمهٔ راشد، ص XXII-XVI) در حدود سال ۲۵۰، و نه چنانکه تاکنون گمان برده‌اند در اواخر قرن سوم، به دست قسطابن لوقای بعلبکی* به عربی ترجمه شده، در ترجمه *صناعة الجبر* نام گرفته است (ابن‌ابی‌اصیبعه، ج ۱، ص ۲۴۵). گذشته از این، واژگان این کتاب، در ترجمهٔ عربی آن سخت تحت تأثیر واژگان جبری است (دیوفانتوس اسکندرانی، ج ۳، مقدمهٔ راشد، ص L). *کتاب الحساب* دیوفانتوس، «هرچند به مفهومی که خوارزمی در نظر دارد کتاب جبر محسوب نمی‌شد، اما حاوی روشهایی مانند روشهای جایگزینی و حذف و تغییرِ متغیّر است» که در محاسبات جبری بسیار به‌کار می‌آیند (راشد، ۱۹۹۷، ص ۳۸). از همین‌رو، مترجم این کتاب قسطابن لوقا، بر سه مقاله و نیم از آن (ابن‌ندیم، ص ۳۵۳) و ابوالوفای بوزجانی (۳۲۸ـ ۳۸۸) ظاهراً بر تمامی آن شرح نوشته است (← ابن‌ندیم، ص ۳۴۱). ابوالوفا کتاب دیگری به نام *کتاب البراهین علی القضایا التی استعمل دیوفنطس فی کتابه و علی ما استعمله هو فی التفسیر* (همانجا) داشته و در آن، چنانکه از عنوانش پیداست، برای قضایای *کتاب الحساب* دیوفانتوس و نیز قضایایی که خود او در شرح آن به کار برده بوده اثباتهایی ارائه کرده بوده است.

کرجی و مکتب او. تأثیر آشنایی جبردانان اسلامی با *کتاب‌الحساب* دیوفانتوس در آثار کرجی، ریاضیدان قرن چهارم هجری و مکتب او، به‌ویژه خلف او سموأل‌بن یحیی مغربی* دیده می‌شود. از زندگی کرجی تقریباً هیچ نمی‌دانیم، جز اینکه احیاناً از مردم یکی از شهرهایی که کَرَج نام داشته‌اند (و شاید هم اهل کَرَخ) بوده و بخش اخیر زندگی خود را در ولایات جبال به کار مهندسی و به‌ویژه حفر قنات گذرانده است. از او، جز کتابی در *استخراج آبهای پنهانی*، رساله‌های چندی در جبر و حساب باقی مانده است، که از آن میان دو رسالهٔ *البدیع* و *الفخری*، که به نام فخرالملک وزیر نوشته شده (کرجی، ۱۴۰۶، ص ۹۷؛ نیز ← قربانی، ص ۳۹۱ـ۳۹۲)، به‌ویژه در خور ذکر است. به گفتهٔ ابن‌خلّکان (ج ۵، ص ۱۲۵ـ۱۲۶) این فخرالملک ابوغالب محمدبن علی‌بن خلف (مقتول در ۴۰۷) وزیر بهاءالدوله و سلطان‌الدولهٔ دیلمی است و کرجی کتاب *الکافی* خود را هم برای او نوشته بوده است. از میان دو شاخهٔ جبر، کار کرجی بیشتر در حوزهٔ تکمیل حساب جبری، یعنی عملیات بر روی عبارات جبری، قرار می‌گیرد و به گفتهٔ ووپکه[2] (ص ۴) «وی کامل‌ترین و در واقع تنها نظریهٔ حساب جبری را که تاکنون در نزد عرب‌زبانها سراغ می‌توان گرفت عرضه کرده است» (البته ووپکه آثار سموأل را نمی‌شناخته است). هدف کرجی، که کمابیش به آن تصریح

1. Ptolemy　　2. Woepcke

می‌کند، این است که علم جبر را به صورت علمی مستقل از هندسه مطرح کند و به‌ویژه گریبان خود را از نمایش هندسی عملیات جبری رها کند (راشد، ۱۹۸۴، ص ۳۲؛ انبوبا، ص ۲۴). از این جهت، کار او از یک سو ادامهٔ سنّتی است که خوارزمی با معرفی عملیات بر روی دو جمله‌ایهای جبری بنیان نهاده بود و از سوی دیگر مبتنی بر امکاناتی است که بر اثر کشف و ترجمهٔ *کتاب‌الحساب* دیوفانتوس در اختیار قرار گرفته و به دست ریاضیدانانی چون ابوالوفای بوزجانی گسترش یافته بود (راشد، ۱۹۸۴، همانجا). با تکیه بر این دو سنّت، کرجی توفیق می‌یابد که نخستین نظریهٔ جبر چندجمله‌ایها را به دست دهد.

در *الفخری* کرجی به بررسی توانهای جبری می‌پردازد (ـــــ ص ۹۸ـ۹۹) و آنگاه عملیات حسابی را در مورد جمله‌ها و عبارات جبری بیان می‌کند. وی با بررسی دو رشتهٔ

$$x\ ,\ x^{۲},\ldots,\ x^{۹},\ldots$$

و

$$\frac{۱}{x}\ ,\ \frac{۱}{x^{۲}}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{۱}{x^{۹}}\ ,\ \ldots$$

قواعد زیر را به دست می‌آورد (ص ۹۹ـ۱۰۱):

$$(۱)\ \frac{۱}{x} : \frac{۱}{x^{۲}} = \frac{۱}{x^{۲}} : \frac{۱}{x^{۳}} = \ldots$$

$$(۲)\ \frac{۱}{x} : \frac{۱}{x^{۲}} = \frac{x^{۲}}{x}\ ,\ \ldots\ ,\ = \frac{۱}{x^{n-۱}} : \frac{۱}{x^{n}} = \frac{x^{n}}{x^{n-۱}}$$

$$(۳)\ \frac{۱}{x}\cdot\frac{۱}{x} = \frac{۱}{x^{۲}}\ ,\ \frac{۱}{x^{۲}}\cdot\frac{۱}{x} = \frac{۱}{x^{۳}}\ ,\ldots,\ \frac{۱}{x^{n}}\cdot\frac{۱}{x^{m}} = \frac{۱}{x^{m+n}}\ (m,\ n\ =\ ۱,۲,۳,\ldots)$$

$$(۴)\ \frac{۱}{x}.\ x^{۲} = \frac{x^{۲}}{x}\ ,\ \frac{۱}{x}.x^{۳} = \frac{x^{۳}}{x}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{۱}{x^{n}}\ .x^{m}\ , = \frac{x^{m}}{x^{n}}\ (m,\ n\ =\ ۱,۲,۳,\ldots)$$

در مورد عملیات جبری بر روی چند جمله‌ایها، کرجی نخست قواعد ضرب و تقسیم یک‌جمله‌ایها را به دست می‌دهد و آنگاه به قواعد ضرب و تقسیم چند جمله‌ایها می‌پردازد. الگوی او برای چندجمله‌ای، یا به اصطلاح کرجی «کمیات مرکّب»، یک عدد دهدهی با مقادیر اعشاری است. همچنانکه در مورد خوارزمی دیدیم، چند جمله‌ای در واقع عبارت می‌شود از بسط عددی در مبنای x به صورت

$$F(x)\ =\ (\overline{a_{n}a_{n-۱}\ldots a_{۰}.\ b_{۱}b_{۲}\ldots\ b_{m}})_{x}$$

$$=\ a_{n}\times x^{n} +\ a_{n-۱}\times x^{n-۱} +\ a_{n-۲}\times x^{n-۲}\ \ldots+\ a\ +\ b_{۱}\times\frac{۱}{x}$$

$$+\,b_{۲}\ \times\frac{۱}{x^{۲}} +\ \ldots b_{m}\ \times\frac{۱}{x^{m}} = \sum_{i=۰}^{n} a_{i}x^{i} + \sum_{j=۱}^{m} b_{j}\ \frac{۱}{x^{j}}$$

در مورد ضرب چند جمله‌ایها، روش کرجی کاملاً کلی است، اما در مورد تقسیم چند جمله‌ایها وی تنها قواعد تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای و تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای را به دست می‌دهد. در مورد استخراج جذر، روش وی کلی است اما به حالتی که ضرایب چند جمله‌ای مثبت باشند محدود می‌شود (راشد، ۱۹۸۴، ص ۳۴).

کرجی قواعد حساب را در مورد کمیاتهای گنگ نیز به کار می‌برد. هدف او این است که نشان دهد که این قواعد وقتی در مورد کمیات گنگ به کار روند ویژگیهای خود را حفظ می‌کنند. اما مشکلی که بر سر راه دارد این است که چگونه می‌توان، بدون در دست داشتن مفهوم اعداد حقیقی، عملیات حسابی را در مورد این اعداد به کار برد، زیرا آنچه جبردانان در اختیار داشتند در واقع مجموعهٔ اعداد گویا بود. در اینجا کرجی بار دیگر به کتاب *اصول* اقلیدس متوسل می‌شود و تعریف خود را از عدد بر تعریف اقلیدس مبتنی می‌کند. همچنین مفاهیم ناهمسنجه و گنگ را بر اساس مقالهٔ دهم *اصول* اقلیدس تعریف می‌کند. با این حال، باید به یاد داشت که در نظر اقلیدس، و شارحان او چون پاپوس، «این ویژگیها ذاتاً هندسی‌اند، و ناهمسنجگی و گنگی در مورد اعداد نمی‌تواند وجود داشته باشد. اعداد همواره گویا و همسنجه‌اند» (و ذلک انّ المتباین و الأصمّ، أمّا فی الاعداد فغیر موجودة بل الاعداد کلّها مُنطقة و مشترکة؛ ـــــ پاپوس اسکندرانی[1]، ص ۱۹۳؛ راشد، ۱۹۸۴، ص ۳۵). کرجی البته نمی‌تواند کاربرد این مفاهیم را در مورد اعداد توجیه کند. تنها توجیه، به نظر راشد، تصوری است که او از جبر داشته است: چون کمیات هندسی (طولها) و اعداد می‌توانند به یکسان مقدارِ مجهول یک معادلهٔ جبری قرار گیرند، بنابراین می‌توان قواعد حسابی یکسانی را دربارهٔ آنها به کار برد (راشد، ۱۹۸۴، ص ۳۵). به این دلیل است که وی می‌نویسد: «من نشان می‌دهم که این مقادیر [ناهمسنجه، گنگ] را می‌توان به عدد تبدیل کرد» (کرجی، ۱۹۶۴، ص ۲۹؛ نیز ـــــ راشد، ۱۹۸۴، ص ۳۶).

به این طریق است که کرجی کار تعبیر جبری مطالب مقالهٔ دهم کتاب *اصول* اقلیدس را، که در نظر عموم ریاضیدانان یونانی یک مقالهٔ هندسی محض بود، پیش می‌برد. پیش از او، در حدود نیمهٔ قرن سوم، محمدبن عیسی ماهانی* (متوفی ح ۲۷۵؛ ـــــ قربانی، ص ۴۳۱) تعبیری عددی از کمیتهای گویا و گنگ مقالهٔ دهم به‌دست داده‌بود (ـــــ بن‌میلاد، ۲۰۰۴، ص ۲۸؛ همو، ۱۹۹۹، ص ۸۹ـ۱۵۶). ماهانی تعریفی از کمیات گنگ و همراه آن نخستین طبقه‌بندی کمیاتی را که به کمک رادیکالها ساختنی‌اند، به دست داده بود که در آن این کمیات به گویا و گنگ تقسیم

1. Pappus of Alexandria

می‌شوند. وجه‌مشترک این دوگروه این است که هر دو می‌توانند جواب معادلات خوارزمی باشند. پس از آن نیز چند ریاضیدان از نظریهٔ جبری معادلات درجهٔ دوم برای ترجمهٔ برخی از قضایای مقالهٔ دهم *اصول* به زبان جبری استفاده کرده بودند (بن‌میلاد، ۲۰۰۴، همانجا). از لحاظ کرجی، مفاهیمی که در این مقاله آمده است، باکمیات به‌طور کلی سروکار دارند و بنابراین در حوزهٔ علم جبر قرار می‌گیرند (راشد، ۱۹۸۴، ص ۳۶). کرجی به کمیات گویا و گنگ به چشم متغیرهای نامعیّن نگاه می‌کند و مقادیر خاص آنها تحت‌الشعاع عملیاتی قرار می‌گیرد که بر روی این کمیات انجام می‌شود. «کمیات گویا و گنگ دیگر به کمک پاره‌خطها معرفی نمی‌شوند و، برای اولین بار، منزلتی صرفاً عددی پیدا می‌کنند. به این دلیل است که کرجی بارها از «عدد گویا» و «عدد گنگ» سخن می‌گوید» (← بن‌میلاد، ۲۰۰۴، ص ۵۰ـ۵۱). به گفتهٔ سموأل‌بن یحیی مغربی (ص ۱۹) «کرجی در همهٔ آثار حسابی‌اش، وقتی از «عدد» سخن می‌گوید منظورش کمیتِ معدود است، منظور او عددی نیست که واحدش تجزیه‌ناپذیر است» (نیز ← بن‌میلاد، ۲۰۰۴، ص ۵۱، پانویس).

به این طریق کرجی موفق می‌شود دستورهایی جبری برای گویا کردن کمیات گنگ به دست دهد. وی این کار را نخست دربارهٔ تک‌جمله‌ایها انجام می‌دهد و قواعدی برای محاسبهٔ

$$(1)\quad x_1\sqrt[n]{x_2}\,,\ \sqrt[n]{x_1}\cdot\sqrt[n]{x_2}\,,\ \sqrt[n]{x_1}\cdot\sqrt[m]{x_2}$$

$$(2)\quad \sqrt[n]{x_1}:\sqrt[n]{x_2}\,,\ \sqrt[n]{x_1}:\sqrt[m]{x_2}$$

$$(3)\quad \sqrt[n]{x_1}\pm\sqrt[n]{x_2}$$

به‌دست می‌آورد. سپس همین روش را در مورد چند جمله‌ایها به‌کار می‌بندد و از جمله قواعدی برای محاسبهٔ عباراتی چون

$$\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_3}-\sqrt{x_2}}\,,\ \frac{x_1}{\sqrt[4]{x_2}+\sqrt[4]{x_3}}\,,\ \sqrt{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$$

به دست می‌دهد (راشد، ۱۹۸۴، ص ۳۶ـ۳۷).

کرجی در یکی از آثار گمشدهٔ خود، که سموأل بخشی از آن را نقل کرده، ضرایب بسط $(a+b)^n$ را محاسبه کرده است و از این نظر بر پاسکال که این ضرایب (مثلث پاسکال) به نام او معروف است، و نیز بر خیام، که او نیز گاهی کاشف این ضرایب شمرده می‌شود، فضل تقدم دارد. مهم‌تر اینکه، برای به دست آوردن این ضرایب، کرجی از نوعی برهان ریاضی که امروزه به «استقراء ریاضی» معروف است استفاده می‌کند، و از این نظر نیز درکشف این روش بر پاسکال و یا لِوی‌بن‌گرشون ریاضیدان یهودی فرانسوی (۱۲۸۸ـ۱۳۴۴) که پیش از این کاشف این روش محسوب می‌شده‌اند، مقدّم است (راشد، ۱۹۷۲، ص ۱ـ۲۱).

بر پایهٔ کار کرجی، سموأل‌بن یحیی مغربی (متوفی ح ۵۷۰)، در *الباهر*، نخستین روش کلی برای عملیات روی چندجمله‌ایها را به دست می‌دهد. کار او نیز بر اساس شباهت میان ساختار چندجمله‌ایهای جبری و اعداد دهگانی است و مبتنی است بر مفهوم «رتبه» و استفاده از جداولی که عملیات جبری را تسهیل می‌کند. در جدولی که برای نمونه آمده است، رُتبهٔ هر

۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	۱	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^5}$	$\frac{1}{x^6}$	$\frac{1}{x^7}$
			۲	۷		۵	۳	۹	۴		۵			
		۶		۱	۵		۲		۳			۶		
		۶	۲	۸	۵	۵	۵	۹	۷		۵	۶		

تک جمله‌ای با فاصلهٔ آن با رتبهٔ صفر (واحد) مشخص می‌شود. ستونهای سمت چپ واحد نشانهٔ رتبه‌های مثبت و ستونهای سمت راست آن نشانهٔ رتبه‌های منفی‌اند. با این قرارداد، سطرهای سوم و چهارم این جدول نمایش تابعهای

$$f(x) = 2x^4+7x^3+5x+3+\frac{9}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^4}$$

و

$$g(x) = 6x^5+x^3+5x^2+2+\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^5}$$

و سطر پنجم نمایش مجموع این دو تابع، یعنی

$$f(x)+g(x)=6x^5+2x^4+8x^3+5x^2+5x+5+\frac{9}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^4}+\frac{6}{x^5}$$

است. به کمک این‌گونه جدولها عملیات جبریِ دیگر را نیز روی چند جمله‌ایها می‌توان انجام داد.

خیام و نظریهٔ هندسی معادلات درجهٔ سوم. اگر آثار کرجی و مکتب او را اوج جریان حسابی کردن جبر به شمار بیاوریم، آثار جبری خیام را می‌توان نقطهٔ اوج جریان هندسی کردن جبر در جهان اسلام دانست. از خیام دو رساله در جبر باقی مانده است، یکی به نام *رسالة فی الجبر و المقابلة* که موضوع آن طبقه‌بندی و حل معادلات با درجهٔ کوچک‌تر یامساوی سه است و دیگری رساله‌ای که *فی قسمة ربع الدائرة* نام دارد، و پیش از *رسالة فی الجبر و المقابلة* تألیف شده و به حل یک مسئلهٔ هندسی خاص به روش جبری می‌پردازد و نیز طبقه‌بندی دیگری برای معادلات با درجهٔ کوچک‌تر یا مساوی سه عرضه می‌کند. اهمیت رسالهٔ دوم در این است که خیام در آن تاریخچه‌ای از مسائلی را که حل آنها به یافتن ریشهٔ معادلات درجهٔ سوم منجر می‌شود به دست می‌دهد. همچنین در این رساله، به خلاف رسالهٔ *الجبر و المقابلة*

که روشی کاملاً ترکیبی دارد، مسئلهٔ مورد نظر به شیوهٔ تحلیلی نیز بررسی می‌شود، و از این نظر این رساله مدخل مهمی است برای آشنایی با راهی که خیام برای رسیدن به روشهای حل معادلات، که در رسالهٔ *الجبر و المقابلة* ارائه شده، پیموده است.

ریاضیدانان یونانی دریافته بودند که حل برخی از مسائل هندسی به آسانی با خط‌کش و پرگار ممکن نیست. ازاین‌رو کوشش می‌کردند که از راه «تحلیل» این مسائل را به مسائلی ساده‌تر که حل آنها شاید آسان‌تر باشد، تبدیل کنند. از آن جمله‌اند سه مسئلهٔ معروف و کلاسیک تضعیف مکعب*، تربیع دایره* و تثلیث زاویه*.

در مسئلهٔ تضعیف مکعب، هدف یافتن ضلع مکعبی است که حجم آن دو برابر مکعب مفروضی باشد. به زبان علائم جبری، اگر ضلع مکعب مفروض را به a و ضلع مکعب مطلوب را به x نمایش دهیم، مسئلهٔ تضعیف مکعب به حل معادلهٔ $x^3 = 2a^3$ منجر می‌شود که معادله‌ای است از درجهٔ سوم. ریاضیدانان یونانی، بی‌آنکه این راه را طی کنند، یعنی معادله‌ای بنویسند، دریافته بودند که مسئلهٔ تضعیف مکعب را می‌توان به «درج دو واسطه میان دو مقدار معلوم» تبدیل کرد. منظور از این اصطلاح، یافتن مقادیر (طولهای) x و y است که در روابط $\frac{x}{a} = \frac{y}{x} = \frac{b}{y}$ صدق کنند. از ضرب این روابط به دست می‌آوریم:

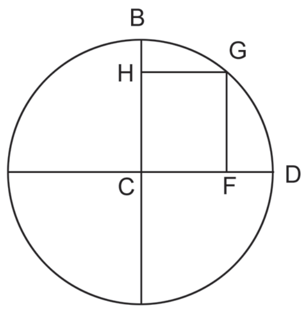
(۱) $x^2 = ay$

(۲) $xy = ab$

رابطهٔ (۱) معادلهٔ یک سهمی به رأس مبدأ مختصات و رابطهٔ (۲) معادلهٔ یک هذلولی متساوی‌الساقین است که مجانبهای آن محورهای مختصات‌اند. به این طریق حل مسئلهٔ «درج دو واسطه در میان دو مقدار معلوم» (و در نتیجه حل مسئلهٔ تضعیف مکعب) به یافتن نقاط تقاطع یک سهمی و یک هذلولی معلوم منجر می‌شود.

این نحوهٔ بیان و استفاده از معادلات نباید ما را در مورد روش یونانیان به اشتباه بیندازد. مسئلهٔ تضعیف مکعب برای ایشان یک مسئلهٔ هندسی صرف بود که به یک مسئلهٔ هندسی دیگر، و آن نیز به یافتن نقاط تقاطع یک سهمی و یک هذلولی، که مسئلهٔ هندسی سومی بود، تحلیل می‌شد، بی‌آنکه ریاضیدانان یونانی در هیچ‌یک از مراحل تحلیل از مفاهیم جبری‌ای چون معادله استفاده کنند.

در دوران اسلامی، ریاضیدانانی در صدد برآمدند تا مسائلی از این قبیل، و نیز برخی از مسائل حسابی یا هندسی را که ضمن پژوهشهای خود ایشان پیش می‌آمد، به زبان معادلات ترجمه کنند. خیام (۱۳۳۹ش[الف]، ص ۶۳، ترجمهٔ فارسی، ص ۲۶۰) این کار را «استعمال واژگان اهل جبر دراین گونه مسائل» می‌نامد (نیز ← راشد و وهاب‌زاده، ص ۲۴۷)، و خود در رسالهٔ *فی‌قسمة ربع‌الدائرة* این روش را به‌کار می‌برد زیرا «با استفاده از این واژگان ضرب و تقسیم آسان‌تر می‌شود» (نیز ← راشد و وهاب‌زاده، ص ۲۴۷). مسئله‌ای که خیام در این کتاب (ص ۵۹) طرح می‌کند این است:



شکل ۵

بر روی ربع دایره‌ای (شکل ۵) نقطهٔ G را چنان بیابید که داشته باشیم $\frac{CD}{GH} = \frac{CH}{HB}$. این مسئله از راه تحلیل به ترسیم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC منجر می‌شود به طوری که $AB + BD = AC$ (BD ارتفاع وارد از رأس B بر ضلع AC است؛ همان، ص ۶۳ـ۶۴).

با فرض $AD = 10$ و $BD = x$، ترسیم این مثلث معادل می‌شود با حل معادلهٔ $x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$ که معادله‌ای است از درجهٔ سوم (همان، ص ۶۵ـ۶۷). خیام در رسالهٔ *فی قسمة ربع الدائرة* به تاریخچهٔ مسائل هندسی‌ای که حل آنها به معادلات درجهٔ سوم می‌انجامد، می‌پردازد. از میان مسائلی که خیام ذکر می‌کند یکی مسئلهٔ ارشمیدس است، یعنی تقسیم کره‌ای به دو قسمت، به‌طوری که حجم قسمت بزرگ‌تر n برابر حجم قسمت کوچک‌تر باشد. ارشمیدس در کتاب *کره و استوانه* خود این مسئله را، از راه تحلیل، به مسئلهٔ زیر تبدیل می‌کند: دو خط AB و BC به اندازهٔ معلوم و بر یک استقامت داده شده‌اند. نسبت BC بر CE معلوم است. بنابراین CE، چنانکه در *مُعطیات* [اقلیدس] ثابت شده، معلوم است. نقطهٔ D را طوری به دست می‌آوریم که نسبت CD بر CE مساوی با نسبت AB^2 بر AD باشد.

خیام (۱۳۳۹ش[الف]، ص ۶۷) پس از آنکه نخستین طبقه‌بندی خود از معادلات درجهٔ سوم را عرضه می‌کند، می‌گوید که «ریاضیدانان متقدم که به زبان ما نمی‌نوشته‌اند» (یعنی ریاضیدانان یونانی) به هیچ‌یک از این معادلات پی نبرده‌اند و یا اگر در این باره چیزی نوشته بوده‌اند به دست ما نرسیده است. اما در میان «همزبانان ما» (یعنی ریاضیدانان دورهٔ اسلامی که به عربی می‌نوشته‌اند) «ماهانی مهندس»، نخستین کسی است که در کوشش برای حل مسئلهٔ ارشمیدس

به یکی از این نوع معادلات رسیده بوده است. بـه گـفتهٔ خـیام (۱۳۳۹ش [الف]، ص ۶۷ـ۶۸)، ماهانی مسئلهٔ ارشـمیدس را بـه معادله‌ای به صورت $x^3 = ax^2 + b$ تبدیل کرد و چون از حل این معادله عاجز ماند به ممتنع بودن مسئله حکم کـرد. پس از آن، ابوجعفر خازن (متوفی بین سـالهای ۳۵۰ و ۳۶۰؛ ← قـربانی، ص ۶۳) راه‌حل این معادله را پیدا کرد و رسـاله‌ای در ایـن بـاره نوشت. ابونصر عـراق (مـتوفی بـین سـالهای ۴۰۸ و ۴۲۷؛ ← قربانی، ص ۱۱۲) ریاضیدان دیگری بود که مسئلهٔ ترسیم ضلع هفت‌ضلعی منتظم را «با استفاده از واژگان جبری» به حل معادلهٔ $x^3 + ax^2 = b$ تبدیل کرد و ایـن مـعادله را بـا کـاربرد مـقاطع مخروطی حل کرد (خیام، ۱۳۳۹ش [الف]، همانجا).

معادلات درجهٔ سوم تنها از کـوشش بـرای حـل بـرخـی از مسائل کلاسیک هندسی زاده نمی‌شدند، بـلکه حـل بـرخـی از مسائل عددی نیز به معادلاتی از درجهٔ سوم منتهی می‌شد. بـه نـوشتهٔ خـیام (هـمانجا، تـرجـمهٔ فـارسی، ص ۲۶۴ـ ۲۶۸)، ابوسهل‌کوهی* (نیمهٔ دوم قرن چهارم) و ابوالوفای بوزجـانی و ابوحامد صاغانی* (متوفی ۳۷۹؛← قربانی، ص ۲۹۲) و برخی ریاضیدانان دیگر، که در دربار عضدالدوله دیلمی بودند، سـعی کردند دستگاه $x + y = 10$ ، $x^2 + y^2 + \frac{x}{y} = 72$ را (به‌شرط $x > y$) حل کنند. حل این دسـتگاه، از راه تـحلیل، بـه مـعادلهٔ $x^3 + ax + b = cx^2$ منجر شد که این ریاضیدانـان از حـل آن درماندند و سرانجام ابوالجود محمدبن لیث*، در دربار سامانیان، آن را حل کرد (نیز ← راشد و وهاب‌زاده، ص ۲۵۵ـ۲۵۷).

پس از خیام نیز ریاضیدانان دیگری در حل حالات خاصی از معادلات درجهٔ سوم کوشیده‌اند. از جمله ریاضیدانی به نام سُلَمی (قرن ششم) در کتاب خود به‌نام *المقدمة‌الکافیة فی حساب‌الجبر و المقابلة*، دو نوع معادلهٔ درجهٔ سوم را در حالت خاص حل کرده و پاسخ آنها را به کمک رادیکالها بـه دست آورده است (راشـد، ۱۹۹۷،ص ۴۰). ابن‌بنّای‌مراکشی (۶۵۴ـ۷۲۱؛← قربانی،ص ۱۷) نیز در کتاب *فی‌الجبر و المقابلة* معادلهٔ درجهٔ سومی را با تـغییر متغیر حل کرده است. نیازهای منجمان نیز در پیدایش برخی از معادلات درجهٔ سوم مؤثر بود. مثلاً بیرونی، برای تشکیل جدول سینوسها، معادلات $x^3 = 3x + 1$ و $3x = x^3 + 1$ را تشکیل داده و آنها را از راه آزمون و خـطا حـل کـرده است (ابـوریحان بیرونی، ۱۳۷۳ـ۱۳۷۵، ج ۱، ص ۲۸۸؛ راشد، ۱۹۹۷، ص ۵۴).

گزارش تاریخی خیام نشان می‌دهد که چگونه در اثر پیدایش علم جبر، مسـائلی کـه پـیش از آن مسـتقیماً از راه جسـتجوی مقاطع مخروطی مـناسب و تـقاطع آنـها حـل مـی‌شد، اکـنون نخست به زبان معادلات ترجمه می‌شد و سپس با کاوش در این معادلات کوشش می‌شد که یک راه هندسی برای حل آنها یافت شود. با این حال، این کوششها، چنانکه خیام گفته است، تنها به معادلات خاصی، آن هم با ضریب عددی خاص منجر می‌شد.

کار خیام نقطهٔ تلاقی این کوششها و سنّت جبری خوارزمی است. وی همان کاری را که خوارزمی دربارهٔ معادلات از درجهٔ کوچک‌تر یا مساوی با دو کرده بود، بـرای مـعادلات بـا درجـهٔ کوچک‌تر یا مساوی با سه انجام می‌دهد، و با در نظر گرفتن کلیهٔ ترکیبهای ممکن x (که وی آن را گاهی شیء و گاهی جذر و گاهی ضلع می‌نامد) و x^2 و x^3 (که وی آن را «مکعب» می‌نامد) به دو نوع طبقه‌بندی این معادلات می‌رسد. خیام در *فی‌قسمة ربع‌الدائرة* (۱۳۳۹ش [الف]، ص ۶۵ـ۶۷، ترجمهٔ فارسی، ص ۲۶۵ـ ۲۶۶؛ نیز ← راشد و وهاب‌زاده، ص ۲۵۱ـ۲۵۵) معادلات را بر حسب درجهٔ آنها تقسیم می‌کند، و به‌این ترتیب به سه دسته معادله می‌رسد:

۱) مـعادلات درجـهٔ اول و دوم. ایـنها هـمان شش مـعادلهٔ خوارزمی‌اند و خیام می‌گوید که حل این معادلات با استفاده از «مقالهٔ دوم» (یعنی مقالهٔ دوم *اصول* اقلیدس) ممکن مـی‌شود، «چنانکه در کتابهای جبریان آمده است». از این عبارت پیداست که وی راه‌حلهای هندسی خود را برای معادلات درجهٔ دوم (که بعداً در رسالهٔ *الجبر و المقابلة* شرح خواهد داد) بـا راه‌حـلهای الگوریتمی جبریان معادل می‌داند.

۲) معادلات درجهٔ‌سوم دوجمله‌ای (مفردات) که‌عبارت‌اند از: $x^3 = ax^2$ که به‌معادلهٔ درجهٔ‌اول $x = a$ تبدیل می‌شود، و $x^3 = ax$ که به معادله درجهٔ دوم $x^2 = a$ تبدیل می‌شود، و $x^3 = a$ که حل آن به طریق عددی و از راه استخراج ریشهٔ سوم و یا به طـریق هندسی و با استفاده از مقاطع مخروطی ممکن است (در واقع این معادله همان مسئلهٔ تضعیف مکعب است که قبلاً از آن یاد کردیم).

۳) سیزده‌معادلهٔ سه‌جمله‌ای‌وچهارجمله‌ای (مُقترنات) درجهٔ سوم که حل آنها تنها با استفاده از مقاطع مخروطی ممکن است.

وی در رسالهٔ *الجبر و المقابلة* (ص ۱۰ـ۱۲، ترجمه فارسی، ص ۱۶۸ـ۱۶۹) تقسیم‌بندی دیگری به‌دست می‌دهد که بر اساس تعداد جمله‌های هر معادله است. به این طریق سه دسته معادله به دست می‌آید:

۱) معادلات دوجمله‌ای (مُـفردات) کـه شـامل یک‌مـعادلهٔ درجهٔ اول، یک معادلهٔ درجهٔ دوم و سه معادلهٔ درجهٔ سوم است. از سه معادلهٔ اخیر، یکی به معادلهٔ درجهٔ اول و دیگری به معادلهٔ درجهٔ دوم قابل تبدیل است. معادلهٔ سوم همان مسئلهٔ تضعیف مکعب است.

۲) معادلات سه جمله‌ای (مقترنات سـه جـمله‌ای) درجـهٔ دوم یا قابل تبدیل به درجهٔ دوم که شامل سه معادلهٔ سه جمله‌ای خوارزمی و معادلات زیر است:

$x^3 + bx^2 = cx$

$x^3 + cx = bx^2$

$x^3 + cx^2 = bx$

در مورد سه معادلهٔ خوارزمی، خیام می‌گوید که این معادلات همانهاست که در کتابهای جبریان آمده است و از طریق هندسی آنها را برهانی کرده‌اند اما از راه عددی بُرهانی بر آنها نیاورده‌اند، و در مورد سه معادلهٔ اخیر می‌نویسد که جبریان این سه معادله را معادل با سه معادلهٔ اول دانسته‌اند، اما در موردی که موضوع این معادلات مقادیر اندازه‌پذیر («ممسوحات»، یعنی مقادیر هندسی) باشد برهانی برای آن اقامه نکرده‌اند. در موردی که موضوع این مسائل عدد باشد، برهان مسئله از کتاب *اصول* اقلیدس روشن است وخود او هم برهان هندسی آن را ذکر خواهد کرد (← راشد و وهاب‌زاده، ص ۱۲۷).

بقیهٔ معادلات را خیام (ص ۱۱ـ۱۲) به صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کند. مقترنات سه جمله‌ای شامل:

$x^3 + cx = b$

$x^3 + b = cx$

$x^3 = cx + b$

$x^3 + cx^2 = b$

$x^3 + b = cx^2$

$x^3 = bx^2 + c$

و مقترنات چهارجمله‌ای که آن هم شامل دو دسته می‌شود. دستهٔ اول معادلاتی که در یک سمت آنها یک جمله و در سمت دیگر سه جمله وجود دارد و شامل معادلات زیر است:

$x^3 + ax^2 + bx = c$

$x^3 + ax^2 + b = cx$

$x^3 + ax + b = cx^2$

$x^3 = ax^2 + bx + c$

دستهٔ دوم از معادلات چهار جمله‌ای معادلاتی است که در هر طرف آنها دو جمله وجود دارد و شامل معادلات زیر است:

$x^3+ax^2=bx+c$

$x^3+ax=bx^2+c$

$x^3+a=bx^2+cx$

به این طریق ۲۵ نوع (صنف) معادله به دست می‌آید که حل ۱۴ نوع از آنها با استفاده از مقاطع مخروطی ممکن است.

روش خیام در حل معادلات درجهٔ سوم. چنانکه دیدیم، جبر از نظر خیام علمی برهانی است، و علم برهانی، در آن زمان، علمی بود که از روشهای هندسی استفاده کند. از این نظر، خیام نه تنها معادلات درجهٔ سوم را به روش هندسی حل می‌کند بلکه برای معادلات درجات اول و دوم نیز راه حلهایی هندسی به دست می‌دهد که بر قضایایی از *اصول* اقلیدس مبتنی است. در حل معادلات درجهٔ سوم نیز او از قضایای *اصول* و *مُعطیات* اقلیدس و دو مقالهٔ اول *مخروطات* آپولونیوس استفاده می‌کند. این تعبیر هندسی هر چند راه حلهای خیام را از ایقان برهانی بهره‌مند می‌کند، اما در تصور او از جبر محدودیتهای ایجاد می‌کند. به این اعتبار، روش خیام نسبت به جبردانان پیشین، از یک جهت پیشرفتی بزرگ و از جهت دیگر گامی به عقب محسوب می‌شود. تعبیر هندسی معادلات جبری سبب می‌شود که خیام مقادیر مجهول را به صورت طولهای هندسی در نظر بگیرد و چون از لحاظ هندسی تنها مقادیر همجنس را می‌توان با هم جمع کرد، در معادله‌ای چون $x^3+bx=c$، چون جملهٔ x^3 از جنس حجم است، ناگزیر ضریب b باید از جنس سطح و مقدار ثابت c نیز از جنس حجم باشد. به این دلیل، خیام در تعبیر توانهای x^n به ازای $n\geq 4$ با دشواری مواجه می‌شود و تصریح می‌کند که این‌گونه عبارات در مورد مقادیر (یعنی کمیتهای هندسی) «موهوم»اند و تنها در مورد اعداد، معنی دارند. خیام (۱۳۳۹ش[الف]، ص ۶۴ـ۶۵، ترجمهٔ فارسی، ص ۲۶۲؛ نیز ← راشد و وهاب‌زاده، ص ۲۴۹) می‌نویسد:

«می‌گویم که آنچه جبریان آن را «مال مال» (x^4) می‌نامند، در مقادیر متصل (کمیات هندسی) چیزی موهوم است و به هیچ وجه در اعیان خارجی وجود ندارد. بلکه الفاظ مال مال (x^4) و مال کعب (x^5) و کعب کعب (x^6) وقتی بر مقادیر قابل اطلاق‌اند که این مقادیر را به عنوان عدد تلقی کنیم».

از این‌رو خیام، برخلاف جبردانان مکتب کرجی که آزادانه عملیات جبری را بر روی همهٔ توانهای مجهول انجام می‌دادند بی‌آنکه تصریح کنند که مقدار مجهول عدد یا مقدار یا کمیت دیگری است، عمل ضرب را در مورد کمیات متصل تا وقتی جایز می‌داند که توان مجهول (و در واقع همهٔ توانهایی که در معادله وارد می‌شوند) از سه تجاوز نکند. از این روست که تنها معادلات تا درجهٔ ۳ را در نظر می‌گیرد.

حل معادلات درجهٔ سوم. خیام هر معادلهٔ درجهٔ سوم را در مراحل معیّنی حل می‌کند. ما این مراحل را در مورد معادلهٔ $x^3+bx = c$ شرح می‌دهیم.

مرحلهٔ اول: همگن کردن معادله. چنانکه گفتیم، برای آنکه معادله معنای هندسی داشته باشد، باید همهٔ جملات آن از یک درجه باشند. خیام کار همگن کردن معادلات را از راه انتخاب واحدهای طول و سطح و حجم انجام می‌دهد. واحد طول خطی است به طول واحد، واحد سطح مربعی است که طول هر یک از اضلاع آن واحد باشد و واحد حجم مکعبی است به ضلع واحد (در مورد پیشینهٔ انتخاب واحدها در آثار بنوموسی ← *دائرةالمعارف بزرگ اسلامی*، ج ۱۲، ص ۶۹۴). در حل این معادله، خیام فرض می‌کند که AB ضلع مکعبی به مساحت b باشد. در این صورت، بنابر یکی از قضایای کمکی‌ای که او خود اثبات کرده است، می‌توان مستطیلی به ضلع BC بنا کرد، به طول که $AB^2.BC=c$. بنابراین معادله به صورت

$x^3+AB^2x=AB^2.BC$ در می‌آید.

مرحلهٔ دوم: انتخاب منحنیها. با ضرب طرفین معادله در x خواهیم داشت:

$$x^4 = AB^2 (BC.\ x - x^2)$$

و یا

$$\frac{x^4}{AB^2} = BC\ x - x^2$$

طرفین این رابطه را مساوی با y^2 می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$y^2 = \frac{x^4}{AB^2} \to y=\frac{x^2}{AB} \quad (1)$$

$$y^2 = BC\ .\ x - x^2 \quad (2)$$

معادلهٔ (۱) معادلهٔ سهمی‌ای است به رأس محور مختصات و پارامتر $\frac{1}{AB}$ (خیام، ۱۳۳۹ ش ب، ص ۲۱). معادلهٔ (۲) را امروزه به صورت

$$(x - \frac{BC}{2})^2 + y^2 = \frac{BC^2}{4}$$

می‌نویسیم که معادلهٔ دایره‌ای است به مرکز $A(\frac{BC}{2},0)$ و شعاع $\frac{BC}{2}$، اما معادلهٔ دایره در زمان خیام ناشناخته بوده است. در واقع خیام (همانجا) این معادله را به این صورت تعبیر می‌کند:

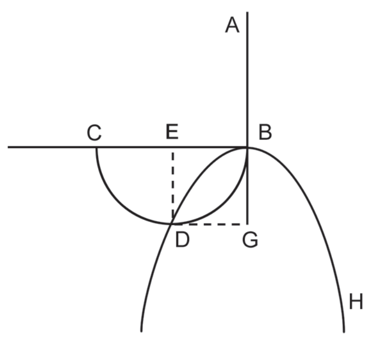
$$y^2 = x\ (BC - x)$$

و از این قضیه استفاده می‌کند که هرگاه دو خط MN و PQ یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند، شرط لازم و کافی برای آنکه M, N, P, Q بر یک دایره باشند، این است که داشته باشیم

$$OM \times ON = OP \times OQ$$

با فرض OM=ON=y و PQ=BC و OP=x، این شرط به رابطهٔ $y^2 = x\ (BC - x)$ تبدیل می‌شود. بنابراین، رابطهٔ (۲) همان معادلهٔ دایره‌ای می‌شود که به روش تحلیلی به دست می‌آید.

خیام (۱۳۳۹ش ب، ص ۲۶) می‌گوید که چون این سهمی و دایره داده‌شده‌اند، بنابراین نقطهٔ تقاطع آنها، که همان ریشهٔ معادله است، نیز داده شده است. به عبارت دیگر، وی به طور شهودی مسلّم می‌گیرد که این دو منحنی یکدیگر را قطع می‌کنند (شکل ۶).



شکل ۶

در مورد معادلات دیگر، روش خیام اصولاً یکسان است. منحنیهایی که وی از آنها استفاده می‌کند عبارت‌اند از دایره و سهمی (در مورد معادلهٔ $x^3+ax=b$) و سهمی و هذلولی متساوی‌الساقین (در مورد سایر مقترنات سه جمله‌ای). از میان مقترنات چهار جمله‌ای، معادلات

$$x^3 + ax^2 + bx = c$$

$$x^3 + bx + c = ax^2$$

$$x^3 + bx = ax^2 + c$$

از راه تقاطع یک دایره و یک هذلولی و چهار معادلهٔ دیگر از راه تقاطع دو هذلولی حل می‌شوند. با این حال خیام، چون همواره یک شاخهٔ هذلولی متساوی‌الساقین را در نظر می‌گیرد، در حالاتی هم که معادله می‌تواند سه ریشهٔ مثبت داشته باشد تنها یک ریشهٔ مثبت آن را به دست می‌آورد.

شرف‌الدین طوسی و دنبالهٔ کار خیام. تا این اواخر تصور می‌شد که رسالهٔ جبر خیام نقطهٔ اوج علم جبر در عالم اسلام است، اما با کشف رسالهٔ *المعادلات* از شرف‌الدین طوسی*، ریاضیدان ایرانی قرن ششم، معلوم شد که پس از خیام نیز ریاضیدانانی برنامهٔ او را ادامه داده‌اند. *المعادلات* رساله‌ای است در جبر که تنها تلخیصی از آن به دست ما رسیده و کاتب در مقدمه (طوسی، ج ۱، ص ۲) آن را *تلخیص صناعة الجبر و المقابلة* نام داده و گفته که عبارات آن را تلخیص و جداول آن را حذف کرده است. با اینکه بدون این جداول درک مقصود طوسی، به خصوص در مورد حل معادلات عددی بسیار دشوار است، رشدی راشد توانسته است این کتاب را بازسازی و تحلیل کند.

برخلاف روش خیام که جبری و کلی است، روش طوسی تحلیلی و موضعی است (راشد، ۱۹۹۷، ص ۴۶). وی معادلات را بر حسب اینکه ریشهٔ مثبت دارند یا ندارند طبقه‌بندی می‌کند. به این ترتیب هشت معادله که همواره ریشهٔ مثبت دارند و پنج معادله که «ممکن است حالات ناممکن داشته باشند» (یعنی ریشهٔ مثبت نداشته باشند) به دست می‌آورد. در مورد معادلاتی که ریشهٔ مثبت دارند وی، مانند خیام، از دو مقطع مخروطی استفاده می‌کند و ریشهٔ معادله را از راه تقاطع این مقاطع به دست می‌آورد و نیز مانند خیام ریشه‌های منفی را نادیده می‌گیرد. خیام تنها به طور شهودی وجود ریشه را مفروض می‌گیرد، اما طوسی با استفاده از واژه‌های «درونی» و «بیرونی» در مورد دو مقطع مخروطی‌ای که در حل معادله به کار می‌رود، نشان می‌دهد که این ریشه وجود دارد (همان، ص ۴۶ـ۴۷).

در بخش دوم *المعادلات*، طوسی به بررسی معادلاتی که ممکن است ریشهٔ مثبت نداشته باشند، می‌پردازد. این معادلات عبارت‌اند از:

$x^3 + c = ax^2$

$x^3 + c = bx$

$x^3 + ax^2 + c = bx$

$x^3 + bx + c = ax^2$

$x^3 + c = ax^2 + bx$

برای بررسی حالتی که ریشهٔ مثبت وجود ندارد، طوسی هر یک از این معادلات را به صورت $f(x)=c$ می‌نویسد، کـه در آن $f(x)$ تابعی چند جمله‌ای از درجهٔ سوم و c مقدار ثابت مـعادله است. به این ترتیب، بررسی وجود ریشهٔ مثبت به بررسی نقاط تقاطع تابع $y=f(x)$ و تابع ثابت $y=c$ منتهی می‌شود. برای ایـن کار، طوسی رفتار تابع $y=f(x)$ را بررسی می‌کند تا مقدار بیشینهٔ این تابع را، که وی آن را بزرگ‌ترین عدد (العددالاعظم) می‌نامد به دست آورد. وی نقطه‌ای به مختصات (x_0, y_0) را که در آن تابع بیشینه می‌شود و نیز مقادیر $f(x)=0$، یعنی نقاط برخورد منحنی نمایش تابع را به محور x، به دست می‌آورد. با این کار حـدود ریشهٔ معادلهٔ اصلی معلوم می‌شود (ریشهٔ مـعادلهٔ $f(x)=c$ بـین ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ است).

برای پیدا کردن مقدار بیشینهٔ $f(x)$، طوسی معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل می‌کند که در آن $f'(x)$ مشتق $f(x)$ است (طوسی توضیح نمی‌دهد که از چه طریقی به معادلهٔ مشتق رسیده است). مثلاً در مورد معادلهٔ

$x^3 + c = ax^2$

$f(x) = ax^2 - x^3$ و $f'(x) = 2ax - 3x^2$. ریشه‌های معادلهٔ اخیر عبارت‌اند از صفر و $\frac{2a}{3}$ که به ترتیب مقدار کمینهٔ صفر و مقدار بیشینهٔ $f(\frac{2a}{3})=c_0$ را به دست می‌دهند. از سوی دیگر، مـعادلهٔ $f(x)=0$ دارای ریشهٔ مضاعف $\lambda_1=0$ و ریشهٔ سادهٔ $\lambda_2=a$ است. طوسی نتیجه می‌گیرد که اگر $c < c_0$، آنگاه معادلهٔ $x^3+c=ax^2$ دو ریشهٔ مثبت x_1 و x_2 دارد که در بین ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ و در دو ســوی ریشـهٔ مـعادلهٔ $f'(x)=0$ قـرار دارنـد. در مـورد معادلات دیگر نیز نحوهٔ استدلال طوسی به همین صورت است (← همان، ص ۴۷ـ۴۸).

دستاورد مهم دیگر طوسی حل عددی معادلات درجهٔ سوم است. وی روشی را که پیش از آن برای استخراج کعب (یـعنی حل عددی معادلهٔ $x^3=c$) به کار مـی‌رفت، و امـروزه بـه روش روفینی ـ هورنر[1] معروف است، به معادلات درجهٔ سـوم چـند جمله‌ای تعمیم می‌دهد و از راه تقریبهای متوالی ریشهٔ تـقریبی این نوع معادلات را به دست می‌آورد (همان، ص ۵۰ـ۵۲).

جبر پس از شرف‌الدین طوسی. آثار مکتب کرجی، خیام و شرف‌الدین طوسی اوج سنّت جبری در عالم اسلام است و پس از ایشان، این علم پیشرفت چندانی در جهان اسلام نداشت. با این حال، از اشاراتی در بعضی از منابع معلوم می‌شود که برخی از ریاضیدانان کار شـرف‌الدیـن طـوسی را مـی‌شناخته‌انـد (← همان، ص ۵۳ـ۵۴). کوشش برای حل برخی از معادلات درجهٔ سوم به کمک رادیکالها نمونه‌ای دیگر از زنده بودن سنّت جبری است (← سطور پیشین) و نیز وجود آثاری چون *مفتاح‌الحساب* غیاث‌الدین جمشید کاشانی (اتمام تألیف در ۸۳۰) نشانهٔ آشنایی عمیق مؤلف با سنّت جبری کرجی است. قواعدی کـه کـاشانی برای جمع و تفریق چند جمله‌ایها (← ص ۱۹۰ـ۱۹۱) و ضرب یک جـمله‌ایـها در یکـدیگر و چـند جـمله‌ایـها در یکـدیگر (ص ۱۹۱ـ۱۹۴) و تقسیم چـند جـمله‌ایـها بـر یک جـمله‌ایـها (ص ۱۹۴ـ۱۹۵) به دست می‌دهد، همان قواعدی است کـه در آثار کرجی و سموأل دیـده مـی‌شود. در مـورد حـل مـعادلات، کاشانی در *مفتاح‌الحساب* به شش مـعادلهٔ درجـات اول و دوم اکتفا کرده و ظاهراً کار خیام را نمی‌شناخته است، چون می‌گوید که پیشینیان دربارهٔ حل معادلات از درجات بالاتر از دو چیزی نگـفته‌انـد جـز شـارح *بـهائیه* (ابـن‌خوّام*) کـه گـفته است کـه شرف‌الدین مسعودی جز این شش دسته، نوزده دسـته مـعادلهٔ دیگر را، از درجهٔ سوم، حل کرده است (غـیاث‌الدیـن جـمشید کـاشانی، ص ۱۹۸ـ۱۹۹). پـیداست کـه مأخـذ کـاشانی مـیان شرف‌الدین طوسی و شرف‌الدین مسعودی، فیلسوف و دانشمند قرن ششم، خلط کـرده است. کـاشانی مـدعی است کـه شـمار معادلات ممکن (یعنی معادلاتی بـا ضـرایب مـثبت) از درجـهٔ $n \leq 4$ نود و پنج است و می‌گوید که او خود راه‌حل هفتاد معادلهٔ درجهٔ چهار و نیز نوزده معادله‌ای را که شرف‌الدین «مسـعودی» حل کرده به دست آورده است، و وعده می‌دهد که در ایـن‌باره کتاب جداگانه‌ای بنویسد. متأسفانه این کتاب کاشانی، اگر هم تألیف شده باشد، از میان رفته است، و بـه ایـن سـبب مـعلوم نیست که راه حلهایی که او مدعی یافتن آن است هندسی بوده است یا به کمک رادیکالها.

گذشته از این آثار، آثار بسیار دیگری هم تألیف شده که هر چند از اهمیت نظری خاصی برخوردار نیستند بر رواج این علم در جهان اسلام دلالت می‌کنند. با همهٔ اختلاف نظری که دربارهٔ جایگاه جبر در میان علوم وجود داشت (← «جایگاه جـبر در میان علوم»)، علم جبر از همان آغاز به صورت جـزء لایـنفک علوم ریاضی درآمد و گواه آن آثار بسیاری است که در این زمینه در شرق و غرب عالم اسلام تألیف شده و واژهٔ «جبر» یا «جبر و مقابله» در عنوان بسیاری از آنها آمده است. در مـیان ایـن آثـار می‌توان از کتابها و رساله‌های زیر نام برد: *المقدمة‌الکـافیة فـی*

1. Ruffini-Horner

اصول الجبر و المقابلة از ابوالحسن علی سهروردی (متوفی ۵۳۳؛ ← قربانی، ص ۳۲۰)؛ *ارجوزهٔ یاسمینیه* در علم جبر از ابن‌یاسمین* مراکشی (متوفی ح ۶۰۱؛ ← قربانی، ص ۵۳)؛ *نصاب‌الحبر فی حساب‌الجبر از ابن فلّوس ماردینی* (۵۹۰ـ۶۳۷ یا ۶۵۰؛ ← قربانی، ص ۴۰)؛ *اختصارالجبر* از ابن بدر* (متوفی پیش از ۶۸۷؛ ← قربانی، ص ۱۴) از مردم بلنسیه (والنسیا) در اندلس؛ رسالهٔ جبر و *مقابله* از خواجه نصیرالدین طوسی؛ رسالهٔ جبر از ابوالعلای بهشتی (متوفی ۷۱۰؛ ← قربانی، ص ۸۸) که برای استفادهٔ فقیهان نوشته شده بوده است (← بهشتی*، ابوالعلا)؛ *الجبر و الخطأین* از سعدِ بیهقی* (زنده در ۷۷۲؛ ← قربانی، ص ۲۶۲)؛ *المقنع فی علم‌الجبر و المقابلة* از ابن‌هائم* مصری (۷۵۳ یا ۷۵۶ـ۸۱۴؛ ← قربانی، ص ۴۶)؛ و *رسالهٔ* جبر از ابومنصور طوسی (ظاهراً سدهٔ نهم؛ ← قربانی، ص ۱۱۱). غالب این آثار ابتدایی‌اند و از «جبر» تنها به حل شش معادلهٔ خوارزمی و گاهی نیز به بیان قواعد حساب بر روی تک جمله‌ایها اکتفا می‌کنند.

گذشته از این، بسیاری از آثاری که در علم حساب نوشته شده‌اند، درکنار قواعد حساب بر روی اعداد صحیح و کسرها و استخراج جذر و نیز محاسبهٔ مساحت اشکال ساده، شامل فصلی در باب جبرند. از این جمله است: *ارشادالحُسّاب فی المفتوح فی علم‌الحساب* از ابن‌فلّوس ماردینی؛ *مرشدةالطالب الی اَسنی المطالب* از ابن‌هائم مصری (← قربانی، ص ۴۵)؛ *لُبّ‌الحساب* از علی‌بن یوسف‌بن علی منشی (قرن ششم، چاپ عکسی، تهران ۱۳۶۸ش)؛ *رسالة فی طریق المسائل العددیة*، به فارسی، از شرف‌الدین سمرقندی (زنده در ۶۳۲؛ ← قربانی، ص ۲۷۶)؛ *کتاب‌البدیع فی علم‌الحساب*، به فارسی، از مسعودبن احمد خاصبکی (احتمالاً اواخر قرن هفتم؛ ← خاصبکی، ص ۴۰۴ـ۴۰۸)؛ *رسالة فی‌الحساب از قاضی‌زاده رومی** (ح ۷۶۶ـ ح ۸۴۰؛ ← قربانی، ص ۳۴۴)؛ *رسالهٔ محمدیه* در حساب از ملاعلی قوشچی* (متوفی ۸۷۹؛ ← قربانی، ص ۳۶۲)؛ *الکفایة فی‌الحساب از غیاث‌الدین* منصور دشتکی (متوفی ۹۴۸؛ ← قربانی ص ۳۳۷)؛ *بُغیةالطُلّاب من علم‌الحساب* از تقی‌الدین راصد*، ابن‌معروف (۹۳۲ـ۹۹۳؛ ← قربانی، ص ۲۰۰)؛ *خلاصةالحساب** از شیخ بهائی (۹۵۳ـ۱۰۳۱) که شروح متعددی به فارسی و عربی بر آن نوشته شده است و *عیون‌الحساب* از ملامحمدباقر یزدی* (زنده در ۱۰۴۷؛ ← قربانی، ص ۴۳۷).

در برخی از این آثار قواعد حساب و جبر در هم آمیخته‌اند، اما در بسیاری از آنها نخست عملیات در مورد اعداد معلوم بیان شده و سپس راههای استخراج مجهولات از طریق جبر ذکر شده است. غالب این آثار از «حساب خطأین» نیز، به عنوان یکی از راههای استخراج مجهولات، در کنار جبر و مقابله بحث کرده‌اند. تقریباً هیچ یک از این آثار از حد حل معادلات شش‌گانهٔ خوارزمی فراتر نمی‌روند، هر چند در *عیون‌الحساب* برخی از معادلات درجهٔ پنجم به صورت تقریبی حل شده است (قربانی، ص ۴۳۷). غالب این آثار هم الگوریتمهای حل معادلات را اثبات نمی‌کنند.

در غرب اسلامی نیز، که تکوین علم جبر در آن متأخر بر شرق و دنباله‌رو آن بود، کتاب پرنفوذ *تلخیص اعمال‌الحساب* اثر ابن‌بنّای مراکشی (۶۵۴ـ۷۲۱) به همین اسلوب تألیف شده و شامل دو جزء است. جزء اول، «در عدد معلوم»، مشتمل بر اعمال اصلی حسابی در مورد اعداد صحیح و کسرها و نیز استخراج جذر، و جزء دوم عمدتاً دربارهٔ جبر و مقابله است که شامل حل معادلات شش‌گانهٔ خوارزمی و نیز قواعد ضرب و تقسیم تک جمله‌ایهای جبری است. ابن‌بنّا برای توان، واژهٔ «اُسّ» را اختیار می‌کند، بدین معنی که اسِّ عدد را صفر، اسّ x را یک، اُسّ x^2 را ۲، ... و اسّ x^n را n می‌گیرد. بدین ترتیب ضرب و تقسیم تک جمله‌ایها به جمع و تفریق اسّ آنها تبدیل می‌شود:

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}$$

$$x^p : x^q = x^{p-q}$$

(ابن‌بنّا، ص ۷۶ـ۷۷). با این نامگذاری ابن‌بنّا قواعدی به دست می‌دهد که معادله‌ای به صورت $ax^{2+p} + bx^{1+p} = cx^p$ را به صورت معادلهٔ $ax^2+bx=c$ در می‌آورد. قواعدی که ابن‌بنّا به دست می‌دهد، هر چند کار محاسبات جبری را آسان‌تر می‌کند، از لحاظ نظری چیزی بر دستاوردهای کرجی و مکتب او نمی‌افزاید.

کاربرد نماد در جبر. تقریباً همهٔ آثار مهم جبری دوران اسلامی به زبان متعارف نوشته شده‌اند و هیچ کوششی برای نمادگذاری در آنها دیده نمی‌شود. تنها استثنا برخی از آثاری است که در قرنهای هشتم تا دهم در غرب اسلامی تألیف شده است. غالب این آثار شروح *تلخیص اعمال‌الحساب* ابن‌بنّا هستند. ابن‌قنفذ ریاضیدان الجزایری (متوفی ۸۱۰) در *حطّ‌النقاب علی وجه عمل‌الحساب* خود (← قربانی، ص ۴۲)، که شرحی است بر *تلخیص* ابن‌بنّا، برای برخی از اصطلاحات جبری صورت مختصری اختیار کرده است. وی شیء را به «ش» و «مال» را به «م» و «کعب» را به «ک» و «مال مال» را به «م م» نشان داده و برای تساوی نیز حرف «ل» را برگزیده است. یکی دیگر از علمای قرن هشتم به نام یعقوب‌بن ایوب‌بن عبدالواحد نیز از همین نشانه‌های ابن‌قنفذ استفاده کرده است (← *تاریخ علم‌الجبر فی‌العالم العربی*، ج ۱، مقدمهٔ سعیدان، ص ۴۴). این گونه نمادگذاری در *کشف‌الجَلباب عن علم‌الحساب* قَلصادی (متوفی ۸۹۱) و *کشف‌الاسرار عن وضع حروف‌الغبار* او، که

خلاصه‌ای است از *کشف‌الجلباب*، به کار رفته است (ووپکه، ص ۳۶۴). قلصادی این‌گونه نمادگذاری را در شرح *تلخیص اعمال‌الحساب* خود نیز به کار برده است. با این نمادگذاری، فی‌المثل معادلهٔ $۸x^{۴} = ۱۶x^{۳} + ۶۴x^{۲}$ به صورت

م

م ک م

۸ ل ۱۶ ۶۴

درمی‌آید (قلصادی، ص ۲۶۹ـ۲۷۵). این‌گونه خلاصه‌نویسی در *بغیة‌الطلاب فی شرح منیة‌الحُسّاب* ابن‌غازیِ مَکناسی* (متوفی ۹۱۹)، که شرحی است به نثر بر منظومهٔ ریاضی مؤلف، هم دیده می‌شود. ظاهراً این‌گونه استفاده از علامات تنها در غرب اسلامی رایج بوده و از همان اوایل قرن دهم نیز متروک شده است.

با این حال، در قرنهای بعدی، برخی از ریاضیدانان ایرانی به مباحث پیشرفته‌تر جبری نیز پرداخته‌اند. در تکمله‌ای که ملاعلی محمد اصفهانی*، ریاضیدان قرن سیزدهم، در ۱۲۴۰ بر *عیون‌الحساب* ملاباقر یزدی نوشته، معادلات درجهٔ سوم به روشی بدیع حل شده است که نشانهٔ زنده بودن سنّت علم جبر اسلامی در ایران آن زمان است (راشد، ۱۹۹۲، ص ۳۹۴). فرزند همین اصفهانی، میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله (۱۲۵۵ـ۱۳۱۶)، در ۱۲۷۶، در دوران دانشجویی در دارالفنون، در رساله‌ای به نام *حلّ مالاینحل* مسائلی را که در آخر *خلاصة‌الحساب* شیخ بهایی آمده و به معادلات جبری درجهٔ چهارم منجر می‌شوند حل کرده است (پاکدامن، ص ۳۲۹ـ۳۳۰). این کتاب را می‌توان نقطهٔ پایان جبر اسلامی و سرآغاز جبر جدید در ایران دانست.

تأثیر جبر دوران اسلامی در اروپا. آشنایی اروپاییان با علم جبر با ترجمهٔ لاتینی *جبر و مقابلهٔ* خوارزمی آغاز شد. از این کتاب دو ترجمهٔ لاتینی در دست است: یکی ترجمهٔ روبرت چستری[1] (یا روبرت ریدینگی[2]) که در ۱۱۴۴ میلادی انجام شده است (کارپینسکی[3]، ص ۱۲۷) این ترجمه نامهای گوناگون دارد که در همهٔ آنها واژه‌های جبر و مقابله آمده است (از جمله *Liber algebrae et almucabola*)، و دیگری ترجمه ژرار (گرارد) کرمونایی (ح ۱۱۱۴ـ۱۱۸۷) که تاریخش معلوم نیست اما به احتمال زیاد پس از ترجمهٔ روبرت چستری انجام شده است. این ترجمه هم *De iebra et almucabala* نام دارد. از هر دو ترجمه نسخه‌های متعدد (و گاه متفاوتی) باقی‌مانده است که گواه بر تأثیر آنها در تحول جبر در اروپای قرون وسطاست. از طریق این ترجمه‌هاست که اروپاییان با علم جبر آشنا شدند. تأثیر جبر اسلامی در آثار لئوناردو فیبوناتچی[4] (ح ۱۱۷۰ـ پس از ۱۲۴۰) که معمولاً نخستین ریاضیدان بزرگ اروپایی شمرده می‌شود، به ویژه در <کتاب حساب>[5] او، به خصوص پس از تحقیق در آثار ابوکامل معلوم شده است. این اثر، «از لحاظ محتوای ریاضی، از حد آثار اسلاف عربی‌نویس فیبوناتچی فراتر نمی‌رود» (*زندگینامهٔ علمی دانشوران*، ج ۴، ص ۶۰۸).

گذشته از این پیوندهای تاریخی، پیوندهای مفهومی میان جبر دوران اسلامی و جبر جدید اروپایی تا قرن هفدهم ادامه می‌یابد. شیوهٔ فرما[6] در محاسبهٔ مقادیر بیشینه و کمینهٔ توابع به شیوهٔ شرف‌الدین طوسی بسیار نزدیک است (طوسی، ج ۱، مقدمهٔ راشد، ص XXX-XXVII) و برنامه‌ای را که دکارت از ۱۶۱۹ آغاز کرد، و حاصل آن کتاب <هندسهٔ>[7] اوست که در ۱۶۳۷ منتشر شد، می‌توان ادامه و مکمل کار خیام در *جبر و مقابله* دانست (راشد و وهاب‌زاده، ص ۱۲ـ۲۹).

منابع: ابن ابی‌اصیبعه، *کتاب عیون الأنباء فی طبقات الأطباء*، چاپ *امرؤالقیس‌بن طحان* [آوگوست مولر]، کونیگسبرگ و قاهره ۱۸۸۲/۱۲۹۹، چاپ افست انگلستان ۱۹۷۲؛ ابن‌اکفانی، *ارشاد القاصد الی أسنی المقاصد*، چاپ محمود فاخوری، محمد کمال، و حسین صدیق، بیروت ۱۹۹۸؛ ابن‌بنّا، *تلخیص اعمال‌الحساب*، حققه و ترجمه الی الفرنسیة محمد سویسی، تونس ۱۹۶۹؛ ابن‌خلّکان؛ ابن‌سینا، *فی اقسام العلوم‌العقلیة*، در *الفلسفة الاسلامیة*، فرانکفورت ۱۹۹۹؛ همو، *منطق‌المشرقیین*، قاهره [۱۹۱۰/۱۳۲۸]، چاپ افست تهران [بی‌تا.]؛ ابن‌غازی، *بغیة الطلاب فی شرح مُنیة‌الحُسّاب*، چاپ محمد سویسی، حلب ۱۹۸۳/۱۴۰۳؛ ابن‌ندیم؛ ابوریحان بیرونی، *کتاب‌التفهیم لاوائل صناعة التنجیم* (متن عربی)، با ترجمهٔ انگلیسی از رمزی رایت، لندن ۱۹۳۴، همان (متن فارسی)، چاپ جلال‌الدین همائی، تهران ۱۳۶۲ ش؛ همو، *کتاب‌القانون‌المسعودی*، حیدرآباد دکن ۱۳۷۳ـ ۱۳۷۵/ ۱۹۵۴ـ ۱۹۵۶؛ شجاع‌بن اسلم ابوکامل، *کتاب الجبر و المقابلة*، چاپ عکسی از نسخهٔ خطی کتابخانهٔ بایزید استانبول، مجموعهٔ قره مصطفی پاشا، ش ۳۷۹، فرانکفورت ۱۴۰۶ الف؛ همو، *کتاب طرائف‌الحساب لابی‌کامل*، در *تاریخ علم‌الجبر فی العالم العربی: دراسة مقارنة مع‌تحقیق لأهمّ کتب الجبرالعربیة*، چاپ احمد سلیم سعیدان، ج ۱، کویت: المجلس الوطنی للثقافة و الفنون و الاداب، ۱۴۰۶ ب؛ احمدبن یحیی بلاذری، *انساب‌الاشراف*، ج ۳، چاپ عبدالعزیز دوری، بیروت ۱۹۷۸/۱۳۹۸؛ همو، *فتوح‌البلدان*، چاپ عبدالله انیس طباع و عمر انیس طباع، بیروت ۱۹۸۷/۱۴۰۷؛ بنوموسی، *کتاب معرفة مساحة الاشکال البسیطة و الکریة لبنی موسی محمد و الحسن و احمد*، در *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, [ed] Roshdi Rashed, vol.1, London: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 1416/1996;

1. Robert of Chester 2. Robert of Reading 3. Karpinski 4. Leonardo Fibonacci
5. *Liber abbaci* 6. Fermat 7. *La géométrie*

ناصر پاکدامن، «میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله و تشخیص *نفوس دارالخلافه*»، *فرهنگ ایران زمین*، ج ۲۰ (۱۳۵۳ ش)؛ *تاریخ علم‌الجبر فی العالم العربی: دراسة مقارنة مع تحقیق لأهمّ کتب الجبر العربیة*، چاپ احمد سلیم سعیدان، کویت: المجلس الوطنی للثقافة و الفنون و الاداب، ۱۹۸۶/۱۴۰۶؛ حاجی‌خلیفه؛ مسعودبن احمد خاصبکی، *کتاب البدیع فی علم‌الحساب*، در *سفینهٔ تبریز*، گردآوری و به خط ابوالمجد محمدبن مسعود تبریزی، چاپ عکسی از نسخهٔ خطی کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۱ ش؛ محمدبن احمد خوارزمی، *کتاب مفاتیح‌العلوم*، چاپ فان فلوتن، لیدن ۱۸۹۵، چاپ افست ۱۹۶۸؛ محمدبن موسی خوارزمی، *کتاب الجبر و المقابلة*، چاپ علی مصطفی مشرفه و محمد مرسی احمد، [قاهره] ۱۹۶۸؛ عمربن ابراهیم خیام، *رسالة لابی الفتح عمربن ابراهیم الخیامی [رسالهٔ تحلیل]*، ترجمهٔ فارسی: *رساله در تحلیل یک مسئله*، در *حکیم عمر خیام بعنوان عالم جبر*، چاپ غلامحسین مصاحب، تهران: انجمن آثار ملی، ۱۳۳۹ ش[الف]؛ همو، *مقالة فی الجبر و المقابلة*، ترجمهٔ فارسی: *رساله‌ی جبر خیام*، در همان، ۱۳۳۹ ش[ب]؛ *دائرةالمعارف بزرگ اسلامی*، زیرنظر کاظم موسوی بجنوردی، تهران ۱۳۶۷ ش ـ ، ذیل «بنی‌موسی» (از حسین معصومی همدانی)؛ دیوفانتوس اسکندرانی، *صناعة الجبر لِدیوفنطس الاسکندرانی*، ترجمهٔ قسطابن لوقا، چاپ رشدی راشد، [قاهره] ۱۹۷۵؛ سموأل‌بن یحیی مغربی، *الباهر فی الجبر*، چاپ رشدی راشد و صلاح احمد، دمشق ۱۹۷۲؛ احمدبن مصطفی طاشکوپری‌زاده، *مفتاح السعادة و مصباح السیادة*، بیروت ۱۹۸۵/۱۴۰۵؛ مظفربن محمد طوسی، *المؤلفات الریاضیّة لشرف‌الدین الطوسی: الجبر و الهندسة فی القرن الثانی عشر*، تحقیق و ترجمهٔ رشدی راشد، پاریس ۱۹۸۶؛ غیاث‌الدین جمشید کاشانی، *مفتاح الحساب*، چاپ سعید دمرداش و محمد حمدی حفنی شیخ، قاهره [۱۹۶۷؟]؛ محمدبن محمد فارابی، *احصاءالعلوم*، چاپ عثمان امین، قاهره ۱۹۴۹؛ محمدبن عمر فخررازی، *جامع‌العلوم (ستّینی)*، چاپ علی آل‌داود، تهران ۱۳۸۲ ش؛ ابوالقاسم قربانی، *زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی: از سدهٔ سوم تا سدهٔ یازدهم هجری*، تهران ۱۳۶۵ ش؛ علی‌بن محمد قَلَصادی، *شرح تلخیص اعمال الحساب*، چاپ فارس بنطالب، بیروت ۱۹۹۹؛ محمدبن حسین کرجی، *کتاب البدیع فی الحساب*، چاپ عادل انبوبا، بیروت ۱۹۶۴؛ همو، *کتاب الفخری للکرجی*، در *تاریخ علم‌الجبر فی العالم‌العربی*، ج ۱، همان، ۱۹۸۶/۱۴۰۶؛ محمدبن محمد نصیرالدین طوسی، *تلخیص المُحَصَّل، بانضمام رسائل و فوائد کلامی*، چاپ عبداللّه نورانی، تهران ۱۳۵۹ ش؛ همو، *رسالهٔ جبر و مقابله*، چاپ اکبر داناسرشت، تهران ۱۳۳۵ ش؛

Adel Anbouba, "L'algèbre arabe aux IX^e^ et X^e^ siècles: aperçu général", *Journal for the history of Arabic science*, vol.2, no.1 (May 1978); Hélène Bellosta, "L'émergence du négatif", in *De Zénon d'Élée à Poincaré: recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed*, ed. Régis Morelon and Ahmad Hasnawi, Louvain: Éditions Peeters, 2004; Marouane Ben Miled, "Les commentaires d' Al-Māhānī et d'un anonyme du Livre X des *Éléments* d'Euclide", *Arabic sciences and philosophy*, vol.9, no.1 (Mar. 1999); idem, "Les quantités irrationnelles dans L'œuvre d' Al-Karajī", in *De Zénon d'Élée à Poincaré*, ibid, 2004; *Dictionary of scientific biography*, ed. Charles Coulston Gillispie, New York: Charles Scribner's Sons, 1981, s.vv. "Diophantus of Alexandria", "Fibonacci, Leonardo" (by Kurt Vogel); Diophantus of Alexandria, *Les arithmétiques*, texte établi et traduit par Roshdi Rashed, vol.3 and 4, Paris 1984; *EI*[2], s.v. "Al-Djabr wa'l-muḳābala" (by Willy Hartner); Euclid, *The thirteen books of Euclid's Elements*, translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Thomas L. Heath, 2nd ed. revised with additions, New York 1956; Solomon Gandz, "The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra", *Osiris*, 3(1937); Thomas L. Heath, *A history of Greek mathematics*, New York 1981; Louis Charles Karpinski, "Robert of Chester's translation of the *Algebra* of Al-Khowarizmi", *Bibliotheca mathematica*, 11(1910-1911); Martin Levey, *The Algebra of Abū Kāmil: Kitāb fī al-jabr wa'l-muqābala in a commentary by Mordecai Finzi*, Madison 1966; Paul Luckey, "Ṭābit b.Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflosung der quardratischen Gleichungen", *Berichte über die Verhandlungen der Sachsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, 93 (1941); Otto Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Providence 1957; Pappus of Alexandria, *The commentary of Pappus on the book X of Euclid's Elements*, Arabic text and translation by William Thomson, Cambridge, Mass. 1930; Claudius Ptolemy, *Ptolemy's Almagest*, translated and annotated by G.J. Toomer, London 1984; Roshdi Rashed, "L'algèbre", in *Histoire des science arabes*, ed. Roshdi Rashed, vol.2, Paris 1997; idem, *Entre arithmétique et algèbre: recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris 1984; idem, "L'induction mathématique: al-Karajī, as- Samaw'al", *Archive for history of exact sciences*, vol.9, no.1 (1972); idem, "Mathématiques traditionnelles dans les pays islamiques au XIX^e^ siècle: l'exemple de l'Iran", in *Transfer of modern science & technology to the Muslim world: Proceedings of the International Symposium on Modern Sciences and the Muslim World*, ed. Ekmeleddin İhsanoğlu, Istanbul: The Research Centre for Islamic History, Art and Culture,1992;Roshdi Rashed and Bijan Wahhabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris 2000; George A.Saliba, "The meaning of al-jabr wa'l- muqābalah", in Edward S. Kennedy, *Studies in the Islamic exact sciences*, Beirut 1983; Aydın Sayılı, *Logical necessities in mixed equations by ʿAbd al Hamīd ibn Turk and the algebra of his time*, Ankara 1985; Fuat Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Leiden 1967- ; Heinrich Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, Amsterdam 1981; Bartel Leendert van der Waerden, *Geometry and algebra in ancient civilizations*, Berlin 1983; Franz Woepcke, *Extrait du Fakhrī, traité d'algèbre par Aboū Bekr Mohammad Ben Alhaçan Alkarkhī, précédé d'un mémoire sur l'algèbre indéterminée chez les Arabes*, Paris 1853.

/ حسین معصومی همدانی /

نکاتی دربارهٔ منشأ و تطور مفهوم جبر و مقابله

دربارهٔ اینکه واژهٔ جبر در علم جبر و مقابله به کدام زبان تعلق دارد، چند نظر مطرح شده است. اگر بپذیریم که این واژه عربی است، در آن صورت برای بررسی وجه نامگذاری این علم به «جبر» لازم است به معنای جبر در زبان عربی توجه کنیم. برای واژهٔ جبر چند معنا برشمرده‌اند، از جمله: بازسازی و ترمیم استخوانهای شکسته یا جوش خوردن آن، نیکو گردانیدن حال، کسی را به زور به کاری واداشتن، به کسی ستم کردن، تسلط و قهر (برای آگاهی از پاره‌ای معانی موردی واژه جبر در زبان عربی ← جوهری؛ ابن‌منظور؛ مرتضی زبیدی، ذیل «جَبَرَ»؛ برای بررسی مقایسه‌ایِ معانی این واژه ← دهخدا، ذیل «جبر»).

واژهٔ جبّار، به عنوان یکی از نامهای خداوند، در قرآن کریم و دعاها و غیر آن به‌کار رفته است (← الجبّار*).

در مورد ریشهٔ واژه و معنای آن در موضوع علم جبر و مقابله می‌دانیم که نخستین بار، محمدبن موسی خوارزمی (ریاضیدان ایرانی، متوفی حـ ۲۳۲) در عنوان اثر مهم خود، *کتاب المختصر فی حساب الجبر و المقابلة* (دربارهٔ این کتاب ← قربانی، ص ۲۴۱ـ۲۴۲؛ نیز ← بخش اول مقاله) و نیز در متن کتاب (از جمله ← ص ۴۰) از این واژه برای بیان مفهومی در ریاضیات و در واقع به عنوان بخشی از علم حساب استفاده کرده است. بررسی آثار ریاضیدانان معاصر خوارزمی یا متعلق به زمانی نزدیک به زندگی او، روشن می‌سازد که کاربرد این واژه برای بیان مفهومی ریاضی، از قرن سوم به بعد بسیار شایع بوده است، به طوری که از چند کتاب جبر و مقابله در این دوران آگاهی داریم، از جمله کتابی از سِنْدبن علی (زندگی در قرن سوم؛ ← قربانی، ص ۲۷۴) و ابوحنیفه دینوری (← ابن‌ندیم، ص ۸۶). به نوشتهٔ ابن‌ابی‌اصیبعه (ج ۱، ص ۲۲۰)، ثابت‌بن قرّه نیز کتابی دربارهٔ علم جبر و ارتباط آن با هندسه داشته است. صورتهای مختلف صرف شدهٔ این واژه را نیز بسیاری از ریاضیدانان متقدم دورهٔ اسلامی، از جمله ابوکامل شجاع‌بن اسلم (ص ۴۹ـ ۵۰)؛ کَرَجی (← قربانی، ص ۳۹۳) و خیام (ص ۷، ۹) به‌کار برده‌اند. اما مسلّم نبودن مناسبت معنای لغوی واژه در زبان عربی با کاربرد آن در ریاضیات و متون ریاضی، باعث شده است که آرای متفاوتی دربارهٔ منشأ و معنای آن مطرح شود. غالباً آن را با معنای اصلاح و رفع نقص پیوند می‌دهند، اما به نظر صَلیبا (ص ۵۴۴) این واژه در متون ریاضی از ریشهٔ جَبَر به معنای ناگزیر کردن کسی (نه اصلاح و رفع‌نقص)، گرفته شده است.

گاندز [1] (۱۹۲۶، ص ۴۳۷ـ۴۳۹؛ همو، ۱۹۳۶، ص ۲۷۴ـ ۲۷۵) این واژه را مأخوذ از ریشهٔ آشوری جَبْر، به‌معنای تساوی و مساوی، می‌داند. با قبول این فرض، تنها مؤید آن، نزدیکی زبان عربی و آشوری به همدیگر، و احتمال انتقال این واژه از آشوری به عربی به سبب قرار گرفتن این دو زبان در خانوادهٔ زبانهای آرامی است (نیز ← گاندز، ۱۹۲۶، ص ۴۳۸ـ۴۴۰).

به نظر سزگین (ص ۷۳)، واژهٔ جبر در کنار چند واژهٔ دیگر ریاضی، از جمله جَیْب، از زبان هندی وارد عربی شده است. یکی از مفصّل‌ترین نوشته‌ها دربارهٔ ارتباط بین زبان سنسکریت و دنیای اسلام، از آنِ ابوریحان بیرونی است که در موارد بسیاری (از جمله ص ۱۳۸ـ۱۳۹، ۳۵۰ـ۳۵۱)، هر جا عبارت یا اصطلاحی را توضیح می‌دهد، در صورت وجود برابر سنسکریت، آن برابر را نیز نقل می‌کند. چون در توضیح مفهوم جبر و مقابله در اثر بیرونی (ص ۴۸ـ۵۱) هیچ نشانی از ذکر معادل سنسکریت وجود ندارد، مشکل بتوان واژهٔ جبر را مأخوذ از سنسکریت دانست. در عین حال، بررسی هر یک از آرای مذکور، نیازمند مطالعهٔ عمیق و همه‌جانبهٔ متون ریاضیات دورهٔ اسلامی و نیز بررسی ریشه‌شناختی این واژه در زبانهای آشوری و سنسکریت است.

آنچه عربی بودن واژهٔ جبر را پذیرفتنی‌تر می‌نماید، کاربرد آن به‌وسیلهٔ خوارزمی و دانشمندانِ پس از او در معنای توسعیِ رفع نقصان و شکستگی در پاره‌ای از معادلات ریاضی است. به نظر می‌رسد خوارزمی وجود جمله یا جملات منفی در معادله را نوعی نقصان تصور می‌کرده (العبارة الناقصة ← خوارزمی، ص ۲۸) و

1. Gandz

برای رفع این مشکل، به افزودن جمله‌های مساوی به هر دو سوی معادله برای حذف جمله‌های منفی اقدام نموده است.

خوارزمی، واژهٔ مقابله را نیز در معنای حذف مقادیر مساویِ هم‌مرتبه از هر دو سوی جمله، به‌کار برده است (برای نمونهٔ استفاده از صورت صرف شدهٔ مقابله در همین معنا ← ص ۴۰). دو معنای مذکور برای این دو واژه را دیگر ریاضیدانان دورهٔ اسلامی (از جمله ابوکامل، ص ۴۹ـ۵۰) و نویسندگان و دانشمندان دیگر (از جمله فخر رازی، ص ۳۹۳؛ ابن‌اکفانی، ص ۸۴) نیز به‌کار برده‌اند. توصیفی که ابن‌خلدون (ج ۱: *مقدمه*، ص ۶۳۶ـ۶۳۷) ضمن توضیح دربارهٔ جبر و مقابله، راجع به تشکیل معادله و ساده‌سازی آن داده است، کمابیش ناظر به همین معنی است. اگرچه دانشمندان متعددی پس از خوارزمی (از جمله قَلَصادی، ص ۲۴۷) کوشیده‌اند تعاریفی از اصطلاح جبر به دست دهند که از لحاظ صورت با کوشش خوارزمی برای حل مسائل جبری متفاوت است، اما در عمل، روش آنان، همان روش مورد نظر خوارزمی است. حتی کرجی هم که تعریفی کمابیش متفاوت با گذشتگان از جبر به دست داده و آن را مجموعهٔ عملیاتی دانسته که مجهول را به مرحلهٔ معلوم شدن نزدیک کند (ص ۱۴۵)، از واژهٔ جبر و مشتقات آن همانند خوارزمی استفاده کرده است (← ص ۱۷۰؛ نیز ← صلیبا، ص ۵۴۹). البته کرجی (ص ۱۴۶) مقابله را به مرحله‌ای از حل معادله اطلاق می‌کند که پس از انجام عملیات جبری، معادله به یکی از شش صورتِ‌نمایی ($bx + c = ax^2$; $ax^2 + c = bx$; $ax^2 + bx = c$; $ax^2 = bx$; $bx = c$; $ax^2 = c$) تبدیل شود (برای چگونگی صورت انجام عملیات جبری در این شش صورت ← همان، ص ۱۴۶ـ۱۶۳).

گفتنی است که در پاره‌ای از آثار ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، واژهٔ جبر به تنهایی در معنای توسعی جبر و مقابله نیز به‌کار رفته است (از جمله ← سموأل‌بن یحیی مغربی، ص ۷۳؛ قلصادی، ص ۲۵۱).

اروپاییان، نخستین بار در قرن ششم / دوازدهم بر اساس ترجمه‌های روبرت چستری[1] و ژرار (گرارد) کرمونایی از جبر و مقابلهٔ خوارزمی، با این اثر آشنا شدند (← بخش اول مقاله). در قرن هشتم / چهاردهم کاناچی[2] نخستین بار واژهٔ algebra را مأخوذ از واژهٔ جبر عربی به‌کار برد، که امروزه هم در زبانهای اروپایی کاربرد دارد. به تدریج طی دو قرن بعد واژهٔ مذکور در زبانهای اروپایی متداول و واژهٔ دوم (یعنی مقابله) حذف شد (*د.اسلام*، چاپ دوم، ذیل «خوارزمی»؛ گاندز، ۱۹۳۶، ص ۲۶۳).

منابع: ابن‌ابی‌اصیبعه، *کتاب عیون الأنباء فی طبقات الأطباء*، چاپ امرؤ القیس‌بن طحان [آوگوست مولر]، کونیگسبرگ و قاهره ۱۸۸۲/۱۲۹۹، چاپ افست انگلستان ۱۹۷۲؛ ابن اکفانی، *ارشاد القاصد الی أسنی المقاصد*، چاپ محمود فاخوری، محمد کمال، و حسین صدیق، بیروت ۱۹۹۸؛ ابن‌خلدون؛ ابن‌منظور؛ ابن‌ندیم؛ ابوریحان بیرونی، *کتاب التفهیم لاوائل صناعة‌التنجیم*، چاپ جلال‌الدین همائی، تهران ۱۳۶۲ ش؛ شجاع‌بن اسلم ابوکامل، *کتاب‌الجبر و المقابلة*، چاپ عکسی از نسخهٔ خطی کتابخانهٔ بایزید استانبول، مجموعهٔ قره مصطفی پاشا، ش ۳۷۹، فرانکفورت ۱۴۰۶/۱۹۸۶؛ اسماعیل‌بن حماد جوهری، *الصحاح: تاج‌اللغة و صحاح العربیة*، چاپ احمد عبدالغفور عطار، بیروت [بی‌تا]، چاپ افست تهران ۱۳۶۸ ش؛ محمدبن موسی‌خوارزمی، *کتاب‌الجبر و المقابلة*، چاپ علی مصطفی مشرفه و محمد مرسی احمد، [قاهره] ۱۹۶۸؛ عمربن ابراهیم خیام، *مقالة فی‌الجبر و المقابلة*، در *حکیم عمر خیام بعنوان عالم جبر*، چاپ غلامحسین مصاحب، تهران: انجمن آثار ملی، ۱۳۳۹ ش؛ دهخدا؛ فؤاد سزگین، *محاضرات فی تاریخ‌العلوم العربیة و الاسلامیة*، فرانکفورت ۱۴۰۴/۱۹۸۴؛ سموأل‌بن یحیی مغربی، *الباهر فی‌الجبر*، چاپ رشدی راشد و صلاح احمد، دمشق ۱۹۷۲؛ محمدبن عمر فخررازی، *جامع‌العلوم* (ستّینی)، چاپ علی آل‌داود، تهران ۱۳۸۲ ش؛ ابوالقاسم قربانی، *زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی: از سدهٔ سوم تا سدهٔ یازدهم هجری*، تهران ۱۳۶۵ ش؛ علی‌بن محمد قَلَصادی، *شرح تلخیص اعمال الحساب*، چاپ فارس بنطالب، بیروت ۱۹۹۹؛ محمدبن حسین کرجی، *کتاب الفخری للکرجی*، در *تاریخ علم الجبر فی العالم العربی: دراسة مقارنة مع تحقیق لأهمّ کتب‌الجبر العربیة*، چاپ احمد سلیم سعیدان، ج ۱، کویت: المجلس الوطنی للثقافة و الفنون و الاداب، ۱۴۰۶/۱۹۸۶؛ محمدبن محمد مرتضی زبیدی، *تاج‌العروس من جواهر القاموس*، چاپ علی شیری، بیروت ۱۴۱۴/۱۹۹۴؛

EI[2], s.v. "Al-Khwārazmī" (by J. Vernet); Solomon Gands, "The origin of the term algebra", *American mathematical monthly*, vol.33 (1926); idem, "The sources of Khowārizmi's *Algebra*", *Osiris*, I(1936); George A. Saliba, "The meaning of al-jabr wa'l-muqābalah", in Edward S. Kennedy, *Studies in the Islamic exact sciences*, Beirut 1983.

/ فاطمه سوادی /

جَبْریان، سلسله‌ای در اَحساء، واقع در ناحیهٔ شرقی شبه‌جزیرهٔ عربستان، که در قرن نهم پایه‌گذاری شد. بنوجَبْر طایفه‌ای از اخلاف عامربن ربیعةبن عُقَیْل بودند (*د. اسلام*، چاپ دوم، تکملهٔ ۳ـ۴، ذیل "Djabrids"). مؤسس سلسله، سیف‌بن زامِل‌بن جَبْر بود که بر ضد آخرین والی جَرْوانیها (از

1. Robert of Chester 2. Canacci